

Material para el taller del curso de Álgebra y geometría analítica

Andrés Cedillo ^{*1}

¹*Departamento de Química, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa*

(Dated: February 12, 2020)

Abstract

- I. Números y expresiones.
- II. Ecuaciones y desigualdades.
- III. Funciones y gráficas.
- IV. Funciones polinomiales y racionales.
- V. Sistemas de ecuaciones y desigualdades.
- VI. Las secciones cónicas.

* www.fqt.izt.uam.mx/cedillo

I. NÚMEROS Y EXPRESIONES.

A. Los números reales.

Ejercicios

1. Escriba el signo correcto ($>$, $<$, $=$) entre cada pareja de números.

a) $-7, -4$

b) $3, -1$

c) $1 + 3, 6 - 2$

2. Coloque en la recta real los números $3, -3, \sqrt{3}, -\sqrt{3}$.

3. Escriba las desigualdades que corresponden a las frases siguientes.

a) -8 es menor que -5 .

b) 0 es mayor que -1 .

c) $\sqrt{2}$ es menor que π .

4. Calcule el valor absoluto de los números $3, -3, 0, \sqrt{2} - 2, 2 - \sqrt{2}$

5. Evalúe las expresiones siguientes.

a) $|4 - 9|$

b) $|-4| - |-9|$

c) $|4| + |-9|$

6. Si $A = -5$, $B = -3$ y $C = 1$, calcule las distancias:

a) $d(A, B)$

b) $d(A, C)$

c) $d(C, B)$

d) $d(0, A)$

Tareas

1. Escriba el signo correcto ($>$, $<$, $=$) entre cada pareja de números.

a) $-3, -5$

b) $-6, 2$

c) $1/4, 0.25$

d) $1/7, 0.143$

e) $3/4 + 2/3, 19/12$

f) $\sqrt{2}, 1.4$

2. Escriba las desigualdades que corresponden a las frases siguientes.

a) 2 es mayor que 1.9.

b) x es negativo.

c) y es positivo.

3. Evalúe las expresiones siguientes.

a) $|3 - 6|$

b) $|0.2 - 1/5|$

c) $|-3| - |-4|$

d) $|\pi - 4|$

e) $(-3)/|-3|$

Respuestas para algunos ejercicios.

E1. a) $-7 < -4$, b) $3 > -1$, c) $1 + 3 = 6 - 2$

E3. a) $-8 < -5$, b) $0 > -1$, c) $\sqrt{2} < \pi$

E4. 3, 3, 0, $2 - \sqrt{2}$, $2 - \sqrt{2}$

E5. a) 5, b) -5, c) 13

E6. a) 2, b) 6, c) 4, d) 5

T1. a) $-3 > -5$, b) $-6 < 2$, c) $1/4 = 0.25$, d) $1/7 < 0.143$,

e) $3/4 + 2/3 < 19/12$, f) $\sqrt{2} > 1.4$

T2.a) $2 > 1.9$, b) $x < 0$, c) $y > 0$

T3. a) 3, b) 0, c) -1, d) $4 - \pi$, e) -1

B. Exponentes y radicales.

Ejercicios

1. Simplifique los números siguientes.

a) $(1/2)^5$

b) $(-3)^3$

c) $(\sqrt{2})^4$

2. Simplifique las expresiones siguientes.

a) $(2a^2b^3c)^4$

b) $\left(\frac{2r^3}{s}\right)^2 \left(\frac{s}{r^3}\right)^3$

c) $(u^{-2}v^3)^{-3}$

3. Simplifique los números siguientes.

a) $\sqrt[5]{1/32}$

b) $\sqrt[3]{-8}$

c) $\sqrt{x^2}$

4. Simplifique las expresiones siguientes.

a) $(-2/3)^4$

b) $\frac{2^{-3}}{3^{-2}}$

c) $(x^2yz^3)(-2xz^2)(x^3y^{-2})$

d) $\left(\frac{c^{-4}}{16d^8}\right)^{3/4}$

Tareas

1. Simplifique las expresiones siguientes.

a) $(-3a^2b^{-5})^3$

b) $(8x^4y^{-3})\left(\frac{1}{2}x^{-5}y^2\right)$

c) $\sqrt{16a^8b^{-2}}$

d) $\sqrt[5]{\frac{8x^3}{y^4}}\sqrt[5]{\frac{4x^4}{y^2}}$

Respuestas para algunos ejercicios.

E1. a) $\frac{1}{32}$, b) -27 , c) 4

E2. a) $16a^8b^{12}c^4$, b) $4s/r^3$, c) u^6v^{-9}

E3. a) $\frac{1}{2}$, b) -2 , c) $|x|$

E4. a) $\frac{16}{81}$, b) $\frac{9}{8}$, c) $-\frac{2x^6z^5}{y}$, d) $\frac{1}{8c^3d^6}$

T1. a) $-27a^6b^{-15}$, b) $\frac{4}{xy}$, c) $\frac{4a^4}{b}$, d) $2\frac{x}{y}\left(\frac{x^2}{y}\right)^{1/5}$

C. Expresiones algebraicas.

Ejercicios

1. Simplifique las expresiones siguientes.

a) $(x^3 + x^2 + x + 1) + (x^3 - x^2 + x - 1)$

b) $(x^3 + x^2 + x + 1) - (x^3 - x^2 + x - 1)$

c) $(x^3 - x^2 + x - 1)(x + 1)$

d) $(16x^4 + 4x^2)/(8x)$

2. Simplifique la expresión $\frac{6x^2y^3 + 4x^3y^2 - 10xy}{2xy}$.

3. Simplifique las expresiones siguientes.

a) $(2r^2 + \sqrt{5})(2r^2 - \sqrt{5})$

b) $\left(\sqrt{c} + \frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2$

c) $(2a - 5b)^3$

4. Factorice las expresiones siguientes.

a) $25r^2 - 49s^2$

b) $81x^4 - y^4$

c) $16x^4 - (y - 2z)^2$

d) $rs + 4st$

e) $3a^2b^2 - 6a^2b$

f) $4ac + 2bc - 2cd - bd$

g) $3x^3 + 2x^2 - 12x - 8$

Tareas

1. Simplifique las expresiones siguientes.

a) $(4x^3 + 2x^2 + 5) + (2x^2 + 4x - 1)$

b) $(x + a)(x - a)$

2. Simplifique las expresiones siguientes.

a) $\frac{3u^3v^4 - 2u^5v^2 + (u^2v^2)^2}{u^3v^2}$

b) $\frac{6a^3b^3 - 9a^2b^2 + 3ab^4}{3ab^2}$

3. Simplifique las expresiones siguientes.

a) $(x^{1/3} - y^{1/3})(x^{2/3} + x^{1/3}y^{1/3} + y^{2/3})$

b) $(8u + 3)^2$

c) $b^6(b^3 - b^{-3})^2$

d) $(a^{1/3} - b^{1/3})^3$

4. Factorice las expresiones siguientes.

a) $x^6 - 1$

b) $8x^6 - 27y^9$

c) $x^3 + 64y^3$

d) $y^6 + 7y^3 - 8$

e) $9x^2y^2 + 15xy^4$

f) $-8p^4qr^2 - 4p^3q^3r^2$

g) $36a^2 - 49b^4$

h) $u^3 + u^2v + uv^2 + v^3$

Respuestas para algunos ejercicios.

E1. a) $2x(x^2 + 1)$, b) $2(x^2 + 1)$, c) $x^4 - 1$, d) $x(2x^2 + 1/2)$

E2. $3xy^2 + 2x^2y - 5$

E3. a) $4r^2 - 5$, b) $c + 2 + 1/c$, c) $8a^3 - 60a^2b + 150ab^2 - 125b^3$

E4. a) $(5r - 7s)(5r + 7s)$, b) $(9x^2 + y^2)(3x + y)(3x - y)$, c) $(4x^2 - y + 2z)(4x^2 + y - 2z)$

d) $s(r + 4t)$, e) $3a^2b(b - 2)$, f) $2c(2a + b) - d(2c + b)$, g) $(3x + 2)(x + 2)(x - 2)$,

T1. a) $4(x^3 + x^2 + x + 1)$, b) $x^2 - a^2$

T2. a) $3v^2 - 2u^2 + uv^2$, b) $2a^2b - 3a + b^2$

T3. a) $x - y$, b) $512u^3 + 576u^2 + 216u + 27$, c) $b^{12} - 2b^6 + 1$, d) $a - 3a^{2/3}b^{1/3} + 3a^{1/3}b^{2/3} - b$

T4. a) $(x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$, b) $(2x^2 - 3y^3)(4x^4 + 6x^2y^3 + 9y^6)$,

c) $(x + 4y)(x^2 - 4xy + 16y^2)$, d) $(y + 2)(y - 1)(y^2 - 2y + 2)(y^2 + y + 1)$, e) $3xy^2(3x + 5y^2)$,

f) $-4p^3qr^2(2p + q^2)$, g) $(6a + 7b^2)(6a - 7b^2)$, h) $(u + v)(u^2 + v^2)$

D. Teorema del binomio.

Ejercicio

1. Simplifique $(u + v)^3 - (u - v)^3$.

Tareas

1. Evalúe explícitamente la expresión $(a + b)^4$.

2. Utilice el teorema de binomio para desarrollar las expresiones siguientes.

a) $(4x - y/2)^3$

b) $(2 + x)^5$

Respuestas para algunos ejercicios.

E1. $2v(v^2 + 3u^2)$

T1. $(a^2 + 2ab + b^2)^2 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

T2. a) $64x - 24x^2y + 3xy^2 - y^3/8$, b) $32 + 80x + 80x^2 + 40x^3 + 10x^4 + x^5$

E. Expresiones racionales.

Ejercicios

1. Simplifique las expresiones siguientes.

a) $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$

b) $\frac{x^3 - 8}{x - 2}$

c) $\frac{6y - 5y^2}{25y^2 - 36}$

d) $\frac{3x^2 - 5x - 2}{x^2 - 4}$

e) $\frac{16x^4 + 8x^3 + x^2}{4x^3 + 25x^2 + 6x}$

2. Evalúe y simplifique las expresiones siguientes.

a) $\frac{w^2 - 1}{w^2 - 1} \cdot \frac{w - 3}{w - 3}$

b) $\frac{x + 2}{2x - 3} \div \frac{x^2 - 4}{2x^2 - 3x}$

c) $\frac{2x + 5}{x^2 + 6x + 9} + \frac{x}{x^2 - 9} + \frac{1}{x - 3}$

d) $\frac{1 - \frac{2}{x + 1}}{x - \frac{1}{x}}$

e) $\frac{\frac{a}{1} - \frac{b}{1}}{\frac{a}{1} + \frac{b}{1}}$

f) $\frac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h}$

g) $\frac{3x^2(2x + 5)^{1/2} - x^3(2x + 5)^{-1/2}}{(x^2 - 1)^4(2x) - 8x^3(x^2 - 1)^3}$

h) $\frac{(x^2 - 1)^8}{(x^2 - 1)^8}$

Tareas

1. Simplifique las expresiones siguientes.

a) $\frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

b) $\frac{4x^3 - 9x}{10x^4 + 11x^3 - 6x^2}$

c) $\frac{2 - x - 3x^2}{6x^2 - x - 2}$

2. Evalúe y simplifique las expresiones siguientes.

a) $\frac{2x + 1}{2x - 1} - \frac{x - 1}{x + 1}$

b) $\frac{1}{\frac{c}{x}} - \frac{c + 2}{\frac{c^2}{y}} + \frac{3}{c^3}$

c) $\frac{\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{1}}{\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{1}}$

$$\text{d) } \frac{\sqrt{t} - 4}{\sqrt{t} + 4}$$

$$\text{e) } \frac{3(x^2 + 4)^{1/3} - 3x(x^2 + 4)^{-2/3} \frac{2x}{3}}{[(x^2 + 4)^{1/3}]^2}$$

Respuestas para algunos ejercicios.

$$\text{E1. a) } \frac{x-1}{x+2}, \text{ b) } x^2 + 2x + 4, \text{ c) } \frac{-y}{5y+6}, \text{ d) } \frac{3x+1}{x+2}, \text{ e) } x \frac{4x+1}{x+6}$$

$$\text{E2. a) } 2 \frac{w-3}{w+1}, \text{ b) } \frac{x}{x-2}, \text{ c) } 2 \frac{x^2+4x-3}{(x+3)^2(x-3)}, \text{ d) } \frac{x}{(x+1)^2}, \text{ e) } a-b, \text{ f) } \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$\text{g) } 5x \frac{x+1}{\sqrt{2x+5}}, \text{ h) } -2x \frac{1+3x^2}{(x^2-1)^5}$$

$$\text{T1. a) } \frac{x^2+2x+4}{x+2}, \text{ b) } \frac{2x-3}{x(5x-2)}, \text{ c) } -\frac{x+1}{2x+1}$$

$$\text{T2. a) } \frac{6x}{(2x-1)(x+1)}, \text{ b) } \frac{3-2c}{c^3}, \text{ c) } \frac{x^2+xy+y^2}{x+y},$$

$$\text{d) } \frac{t-8\sqrt{t}+16}{t-16}, \text{ e) } \frac{x^2+12}{(x^2+4)^{4/3}}$$

II. ECUACIONES Y DESIGUALDADES.

A. Ecuaciones lineales.

Ejercicios

1. Resuelva las ecuaciones siguientes.

$$\text{a) } \frac{3}{2(x-2)} - \frac{5}{x+3} = \frac{2}{x-2}$$

$$\text{b) } \frac{3x}{x-2} = 1 + \frac{6}{x-2}$$

Tareas

1. Resuelva las ecuaciones siguientes.

$$\text{a) } \sqrt{2}x - 5 = 0$$

$$\text{b) } \frac{12-7w}{6} = \frac{2w+1}{9}$$

$$\text{c) } (6x-5)^2 = (4x+3)(9x-2)$$

$$\text{d) } (x-1)^3 = (x+1)^3 - 6x^2$$

Respuestas para algunos ejercicios.

$$\text{E1. a) } x = 17/11, \text{ b) } x = 2$$

$$\text{T1. a) } x = 5\sqrt{2}/2, \text{ b) } w = 34/25, \text{ c) } x = 31/79, \text{ d) } \text{No hay solución.}$$

B. Aplicaciones.

Ejercicios

1. Resuelva los problemas siguientes.

a) Obtenga la temperatura en grados Fahrenheit de: (i) la temperatura de congelación del agua, (ii) la temperatura de ebullición del agua.

b) Obtenga la temperatura en grados Celsius cuando: (i) la temperatura es 0°F , (ii) la temperatura es 100°F .

c) Cuándo las temperaturas son iguales en las escalas Celsius y Fahrenheit?

d) Si las dos primeras calificaciones son 64 y 78. Cuál debe ser la tercera calificación para obtener un promedio de 80?

e) El costo final de un objeto fue \$28 y se compró con el 20% de descuento. Calcule el costo original.

f) Se tienen 10 mL de alcohol al 30% en volumen y se desea obtener una mezcla al 50%. Cuánto alcohol puro se debe agregar?

g) La distancia entre dos lugares es 150 km. El auto rojo sale a las 13:00 hrs. con velocidad de 40 km/h. El auto azul parte a las 13:30 hrs. a 55 km/h. Cuándo coinciden?

Respuestas para algunos ejercicios.

E1. a) (i) $F = 32$, (ii) $F = 212$; b) (i) $C = -160/9$, (ii) $C = 340/9$; c) $C = -40$;

d) 98; e) \$35; f) 4 mL; g) $220/3$ km

C. Ecuaciones cuadráticas.

Ejercicios

1. Factorice y resuelva las ecuaciones siguientes.

a) $x^2 + 3x + 2 = 0$

b) $9x^2 + 3 = -12x$

c) $16b^2 = 8b - 1$

d) $x^2 + 5x = 0$

e) $3x^2 + x = 10$

2. Resuelva las ecuaciones siguientes.

a) $4x^2 + x - 3 = 0$

b) $z^2 + 11z - 48 = 0$

c) $z^2 - 13z - 48 = 0$

d) $2 + 11x - 2(x + 1)^2 = x$

3. Se necesita una caja de base cuadrada, con 3 cm de altura y volumen de 48 cm^3 . Se debe construir a partir de un cuadrado de cartón. De qué tamaño debe ser el cuadrado?

Tareas

1. Resuelva las ecuaciones siguientes.

a) $9x^2 - 30x + 25 = 0$

b) $4y^2 + 29y + 30 = 0$

c) $\frac{3}{2}z^2 - 4z - 1 = 0$

d) $\frac{x+1}{3x+2} = \frac{x-2}{2x-3}$

e) $\frac{5}{w^2} - \frac{10}{w} + 2 = 0$

2. Dada la ecuación $4x^2 - 4xy + 1 - y^2 = 0$.

a) Resuelva para la variable x .

b) Resuelva para la variable y .

Respuestas para algunos ejercicios.

E1. a) $x = -1, -2$, b) no hay soluciones reales, $x = (-1 \pm i\sqrt{11})/3$, c) $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$,

d) $0, -5$, e) $-2, \frac{5}{3}$

E2. a) $x = -1, 3/4$, b) $z = (-11 \pm \sqrt{313})/2$, c) $z = 16, -3$, d) $x = 0, 7/2$

E3. $l = 10 \text{ cm}$.

T1. a) $x = 5/3, 5/3$, b) $y = -6, -5/4$, c) $z = (4 \pm \sqrt{22})/3$,

d) $x = (3 \pm \sqrt{13})/2$, e) $(5 \pm \sqrt{15})/2$

T2. a) $x = \frac{1}{2}(y \pm \sqrt{2y^2 - 1})$, b) $y = -2x \pm \sqrt{8x^2 + 1}$

D. Números complejos.

Ejercicios

1. Simplifique las expresiones siguientes.

a) $(3 + 4i) + (2 + 5i)$

b) $(3 + 4i)(2 + 5i)$

c) $4(2 + 5i) - (3 - 4i)$

d) $i(3 - 2i)^2$

e) i^5

f) $(a + bi) + (a + bi)^*$

g) $(a + bi)(a + bi)^*$

h) $\frac{1}{\frac{9 + 2i}{7 - i}}$

i) $\frac{1}{3 - 5i}$

j) $(5 - \sqrt{-9})(-1 + \sqrt{-4})$

2. Resuelva las ecuaciones siguientes.

a) $x^2 - x + 1 = 0$

b) $x^3 + 1 = 0$

c) $x^4 = 81$

d) $4x^4 + 25x^2 + 36 = 0$

e) $(x - y) + 3i = 7 + yi$

3. Demuestre que:

a) $(z + w)^* = z^* + w^*$

b) $(z^*)^* = z$

Tareas

1. Simplifique las expresiones siguientes.

a) $(5 + 7i) + (-8 - 4i)$

b) $(2 - 6i) - (7 + 2i)$

c) $(3 - 6i)(2 + i)$

d) $7i(13 + 8i)$

e) $(i + 1)^3$

f) $\frac{1}{\frac{5 + 8i}{6 + 4i}}$

g) $\frac{1}{1 - 5i}$

2. Resuelva las ecuaciones siguientes.

a) $8 + (3x + y)i = 2x - 4i$

b) $x^2 + 3x + 6 = 0$

c) $x^3 + 27 = 0$

Respuestas para algunos ejercicios.

E1. a) $5 + 9i$, b) $-14 + 23i$, c) $5 + 24i$, d) $12 + 5i$, e) i , f) $2a$, g) $a^2 + b^2$,

h) $9/85 - 2i/85$, i) $13/17 + 16i/17$, j) $1 + 13i$

E2. a) $x = (-1 \pm \sqrt{3})/2$, b) $x = 1, (-1 \pm \sqrt{3})/2$, c) $x = -3, 3, 3i, -3i$,
d) $x = \pm 2i, \pm 3i/2$, e) $x = 10, y = 3$

T1. a) $-3 + 3i$, b) $-5 - 8i$, c) $12 - 8i$, d) $-56 + 91i$, e) $-2 - 2i$,

f) $5/89 - 8i/89$, g) $-7/13 + 17i/13$

T2. a) $x = 4, y = -16$, b) $x = (-3 \pm i\sqrt{15})/2$, c) $x = -3, (3 \pm 3i\sqrt{3})/2$

E. Otros tipos de ecuaciones.

Ejercicios

1. Resuelva las ecuaciones siguientes.

a) $4x^3 + 12x^2 = 9x + 27$

b) $2x^3 = 5x^2$

c) $3 + \sqrt{3x + 1} = x$

d) $\sqrt{2x - 3} - \sqrt{x + 7} + 2 = 0$

e) $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$

f) $2t^{1/3} - 5t^{1/6} + 2 = 0$

Tareas

1. Resuelva las ecuaciones siguientes.

a) $6x^5 + 10x^4 = 3x^3 + 5x^2$

b) $1/x = 1/x^2$

c) $\sqrt{1 + 4\sqrt{x}} = \sqrt{x - 1}$

d) $3w - 19\sqrt{w} + 20 = 0$

e) $\left(\frac{t}{t+1}\right)^2 + 2\frac{t}{t+1} - 15 = 0$

Respuestas para algunos ejercicios.

E1. a) $x = -3, \pm\sqrt{3}/2$, b) $x = 0, 0, 5/2$, c) $x = 8$, d) $x = 2$,

e) $x = \pm\sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}, \pm\sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}$, f) $t = 64, 1/64$

T1. a) $x = 0, 0, -5/3, \pm\sqrt{2}/2$, b) $x = 1$, c) $x = 10 \pm 4\sqrt{6}$, d) $w = 25, 16/9$,

e) $t = -3/2, -5/6$

F. Desigualdades.

Ejercicios

1. Resuelva las desigualdades siguientes.

a) $5x - 6 > 11$

b) $3x - 5 < 10$

c) $3x + 1 < 5x - 4$

d) $-4 < 3x + 5 < 8$

e) $6 > 2x - 6 > 4$

f) $\frac{1}{6 - 2x} < 0$

g) $|x| < 25$

h) $|x| > 6$

i) $\frac{3}{|5 - 2x|} \leq 1$

j) $x^2 > 7x - 10$

Tareas

1. Resuelva las desigualdades siguientes.

a) $2 - 7x \leq 16$

b) $6x - 5 > 9x + 1$

c) $0 < 2 - 3x/4 \leq 1/2$

d) $(1 - 4x)^{-1} < 0$

e) $|x| > 1/2$

f) $|x - 10| \leq 0.05$

g) $|-x| \leq 10$

h) $|\frac{4 - x}{2}| > 9$

i) $x^2 - x - 6 < 0$

j) $(9 - 4x)(x + 1) \geq 0$

k) $25x^2 - 16 > 0$

l) $x^3 < x$

Respuestas para algunos ejercicios.

E1. a) $x > 17/5$, b) $x < 5$, c) $x > 5/2$, d) $-3 < x < 1$, e) $5 < x < 6$, f) $x > 3$,

g) $-25 < x < 25$, h) $(-\infty, -6) \cup (6, \infty)$, i) $(-\infty, 1] \cup [4, \infty)$, j) $(-\infty, 2) \cup (5, \infty)$

T1. a) $x \geq 7$, b) $x < -2$, c) $2 < x < 8/3$, d) $x > 1/4$, e) $(-\infty, -1/2) \cup (1/2, \infty)$,

f) $9,95 \leq x \leq 10.05$, g) $-10 \leq x \leq 10$, h) $(-\infty, -14) \cup (22, \infty)$, i) $(-2, 3)$,

j) $[-1, 9/4]$, k) $(-\infty, -4/5) \cup (4/5, \infty)$, l) $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

III. FUNCIONES Y GRÁFICAS.

A. Sistema de coordenadas en dos dimensiones.

Ejercicios

1. Represente en un diagrama cartesiano los puntos $A = (-1, -3)$, $B = (6, 1)$ y $C = (2, -5)$. Muestre que el triángulo ABC es rectángulo.

2. Represente en un diagrama cartesiano los puntos indicados y el punto medio entre ellos.

a) $(1, 2)$ y $(-1, -2)$

b) $(-1, 2)$ y $(1, -2)$

3. Represente en un diagrama cartesiano cada una de las condiciones siguientes.

a) $x = 3$

b) $y = -1$

c) $x \geq 0$

d) $y < 0$

e) $xy > 0$

Tareas

1. Calcule la distancia entre los puntos $(4, -3)$ y $(6, 2)$.

2. Represente en un diagrama cartesiano los puntos $A = (8, 5)$, $B = (1, -2)$ y $C = (-3, 2)$. Calcule el área del triángulo ABC

3. Indique si los puntos $(-4, 2)$, $(1, 4)$, $(3, -1)$ y $(-2, -3)$ están en los vértices de un cuadrado.

4. Represente en un diagrama cartesiano cada una de las condiciones siguientes.

a) $y = 0$

b) $x = -5$

c) $y \geq 1$

d) $xy = 0$

e) $x/y < 0$

Respuestas para algunos ejercicios.

E2. a) $(0, 0)$, b) $(0, 0)$

T1. $\sqrt{29}$

T2. Área= 28

B. La gráfica de una ecuación.

Ejercicios

1. Haga la gráfica de la ecuación $y = x^2 + 3$.

2. Obtenga los interceptos de las ecuaciones siguientes.

a) $y = 2x^2 - 1$

b) $y = \frac{1}{3}x^2$

c) $y = x^3 - 8$

3. Indique si las ecuaciones siguientes tienen simetría en el plano cartesiano.

a) $y^2 = x$

b) $4y = x^3$

4. Encuentre la ecuación de los círculos con las características siguientes. a) Con centro en $(3/4, -2/3)$ y radio igual a $3\sqrt{2}$.

b) Con centro en el origen y que pasa por el punto $(4, -7)$.

5. Encuentre el centro y el radio del círculo descrito por cada una de las ecuaciones siguientes.

a) $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 36 = 0$

b) $2x^2 + 2y^2 - 12x + 4y = 15$

6. Encuentre el dominio, los interceptos, el radio y el centro de los círculos siguientes.

a) $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 10 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$

7. Obtenga la ecuación del círculo cuyo diámetro es el segmento entre los puntos $(4, -3)$ y $(-2, 7)$.

Tareas

1. Obtenga los interceptos, el dominio y la gráfica de cada una de las ecuaciones siguientes.

a) $y = -x^3 + 1$

b) $y = \sqrt{-x}$

c) $y = \sqrt{x - 4}$

2. Obtenga los interceptos, el dominio y la simetría de cada una de las ecuaciones siguientes.

- a) $y = -4x^2$
- b) $y = 2x^2 - 1$
- c) $x = \frac{1}{4}y^2$
- d) $y = \frac{1}{2}x^3$
- e) $y = 3x + 2$
- f) $y = x$

3. Encuentre la ecuación del círculo que cumple con las condiciones de cada caso.

- a) Con centro en $(4, -1)$ y tangente al eje x .
- b) Con radio igual a 4, tangente a ambos ejes y con centro en el cuadrante II.

4. Encuentre el centro y el radio del círculo descrito por cada una de las ecuaciones siguientes.

- a) $9x^2 + 9y^2 + 12x - 6y + 4 = 0$
- b) $x^2 + y^2 - 10x + 18 = 0$

5. Encuentre el dominio, los interceptos, el radio y el centro del círculo $x^2 + y^2 + 4y - 10x + 13 = 0$

6. Haga un esquema de las ecuaciones siguientes.

- a) $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 4$
- b) $y = -\sqrt{16 - (x - 4)^2}$
- c) $x = \sqrt{9 - y^2}$

Respuestas para algunos ejercicios.

E2. a) $(1/\sqrt{2}, 0), (-1/\sqrt{2}, 0), (0, -1)$, b) $(0, 0)$, c) $(0, -8), (2, 0)$

E3. a) simétrica respecto al eje X, b) simétrica con respecto al origen.

E4. a) $(x - 3/4)^2 + (y + 2/3)^2 = 18$, b) $x^2 + y^2 = 65$

E5. a) $C = (2, -3), r = 7$, b) $C = (3, -1), r = \sqrt{35/2}$

E6. a) $C = (-1, 5), r = 4, D = [-5, 3]$, b) $C = (0, 3), r = 2, D = [-2, 2]$

E7. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 34$

T1. a) $D = \mathbb{R}(0, 1), (1, 0)$, b) $D = (-\infty, 0], (0, 0)$, c) $D = [4, \infty), (4, 0)$

T2. a) $D = \mathbb{R}, (0, 0)$, simétrica con respecto al eje Y,

b) $D = \mathbb{R}, (0, -1), (-1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{2}, 0)$, simétrica con respecto al eje Y,

c) $D = [0, \infty), (0, 0)$, simétrica con respecto al eje X,

d) $D = \mathbb{R}, (0, 0)$, simétrica con respecto al origen,

e) $D = \mathbb{R}, (0, 2), (-2/3, 0)$, sin simetría,

f) $D = \mathbb{R}, (0, 0)$, simétrica con respecto al origen.

T3. a) $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 1$, b) $(x + 4)^2 + (y - 4)^2 = 16$

T4. a) $C = (-2/3, 1/3), r = 1/3$, b) $C = (5, 0), r = \sqrt{7}$

T5 $D = [-9, -1], (-5 + 2\sqrt{3}, 0), (-5 - 2\sqrt{3}, 0), r = 4, C = (-5, -2)$

T6. Círculos o semicírculos con: a) $C = (4, -2), r = 2$, b) $C = (4, 0), r = 4$,

c) $C = (0, 0), r = 3$

C. La recta.

Ejercicios

1. Obtenga la ecuación de recta que pasa por cada pareja de puntos.

a) $(2, 5), (-2, -1)$

b) $(4, 3), (-2, 3)$

c) $(4, -1), (4, 4)$

2. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto $(0, 2)$ y con pendiente igual a -8 .

3. Obtenga la ecuación de la recta que pasa por el punto $(5, -7)$ y es paralela a $6x + 3y = 4$.

4. Obtenga la ecuación de la recta que pasa por el punto $(5, -7)$ y es perpendicular a $6x + 3y = 4$.

5. Para una altitud (h) entre 0 y 6000 m, la temperatura del aire (T) es lineal con la altura, $\Delta T/\Delta h = -1^\circ C/150m$. Calcule la diferencia en la temperatura entre la cima de Ajusco ($h_{Ajusco} = 3930m$) y la Cd. de México ($h_{CDMX} = 2240m$).

Tareas

1. Obtenga la pendiente y los interceptos de la recta que pasa por los puntos $(-3, 2)$ y $(5, -4)$.

2. Use el concepto de la pendiente para mostrar que los puntos $(1, 7), (6, 4), (0, -6)$ y $(-5, -3)$ son los vértices de un rectángulo.

3. Encuentre la ecuación de la recta que cumple con cada conjunto de condiciones.

a) Pasa por el punto $(-1, 6)$ y con intercepto $(5, 0)$

b) Con los interceptos: 4 con el eje x y -3 con el eje y .

4. Obtenga la pendiente y la ordenada al origen de cada una de las rectas siguientes.

a) $2x = 15 - 3y$

b) $7x - 14y + 8 = 0$

5. Cuándo la temperatura en el escala Farenheit es el doble de la escala Celsius?

Respuestas para algunos ejercicios.

E1. a) $y = 2 + 3x/2$, b) $y = 3$, c) $x = 4$

E2. $y = 2 - 8x$

E3. $y = 4/3 - 2x$

E4. $y = -19/2 + x/2$

E5. $\Delta T = -11.9^\circ C$

T1. $m = -3/4, (0, -1/4), (-1/3, 0)$

T2. $m_{12} = -3/5, m_{23} = 5/3, m_{34} = -3/5, m_{41} = 5/3$

T3. a) $y = 5 - x$, b) $y = -3 + 3x/4$

T4. a) $m = -2/3, b = 5$, b) $m = 1/2, b = 4/7$

T5. $F = 320$

D. El concepto de función.

Ejercicios

1. Para la función $g(x) = \frac{\sqrt{4+x}}{1-x}$, encuentre el dominio y calcule $g(5)$, $g(-2)$, $g(a)$ y $-g(-a)$.

2. Encuentre el dominio y haga un esquema de la función $f(x) = \sqrt{9-x^2}$. Indique en que intervalos la función es creciente y decreciente.

3. Para $F(x) = ax^2 + bx + c$, simplifique el cociente $\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$.

4. Encuentre la función lineal que cumple con $f(-3) = 1$ y $f(3) = 2$

5. El triángulo ABC está inscrito en el semicírculo unitario positivo. Con $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$ y $C = (x, y)$.

a) Demuestre que las rectas \overline{AC} y \overline{BC} son perpendiculares.

b) Calcule las distancias $f_1(x) = d(A, C)$ y $f_2(x) = d(C, B)$ en función del valor de la coordenada x .

c) Obtenga el área del triángulo (A) como función del valor de la coordenada x .

d) Grafique la ecuación $y = A(x)$.

Tareas

1. Calcule $f(-3)$, $f(0)$ y $f(2)$, para $f(x) = -x^3 - x^2 + 3$.

2. Encuentre el dominio de las funciones siguientes.

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 25}$

b) $g(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{2-x}$

3. Identifique los intervalos en dónde cada función es creciente y decreciente.

a) $f(x) = 3x - 2$

b) $g(x) = 4 - x^2$

c) $h(x) = \sqrt{4-x}$

4. Simplifique el cociente $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ para cada una de las funciones siguientes.

a) $f(x) = mx + b$

b) $f(x) = 1/x$

Respuestas para algunos ejercicios.

E1. $D_g = [-4, 1) \cup (1, \infty)$, $g(5) = -3/4$, $g(-2) = \sqrt{2}/3$, $g(a) = \frac{\sqrt{4+a}}{1-a}$,
 $-g(-a) = -\frac{\sqrt{4-a}}{1+a}$

E2. $D_f = [-3, 3]$, es creciente en $[-3, 0)$ y decreciente en $(0, 3]$.

E3. $2ax + b + ah$

E4. $f(x) = x/6 + 3/2$

E5. b) $f_1(x) = \sqrt{2(1+x)}$, $f_2(x) = \sqrt{2(1-x)}$, c) $A(x) = \sqrt{1-x^2}$

T1. $f(-3) = 21$, $f(0) = 3$, $f(2) = -9$

T2. a) $D = (-\infty, -5] \cup [5, \infty)$, b) $D = [-2, 2]$

T3. a) creciente en \mathbb{R} ,

b) creciente en $[0, \infty)$ y decreciente en $(-\infty, 0]$,

c) decreciente en $(-\infty, 4]$

T4. a) m , b) $\frac{-1}{x(x+h)}$

E. La gráfica de una función.

Ejercicios

1. Identifique la paridad de las funciones siguientes.

a) $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 5$

b) $f(x) = 2x^5 - 7x^3 + 4x$

c) $f(x) = x(x^2 + 1)$

2. Encuentre la paridad, el dominio y el rango de la función $f(x) = |x|$

3. Grafique las funciones $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x^2 + 4$ y $f_3(x) = x^2 - 4$.
4. Grafique las funciones $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = (x - 2)^2$ y $f_3(x) = (x + 2)^2$.
5. Grafique las funciones siguientes.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 3 & , x < -2 \\ -x + 1 & , |x| \leq 2 \\ -1 & , x > 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = |x^2 - 4|$$

Tareas

1. Encuentre la paridad, el dominio y el rango de las funciones siguientes.
- a) $f(x) = x^3 - 1/x$
- b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$
- c) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x}$
2. Grafique $f(x) = |x - c|$, para $c = 3, 1, -3$.
3. Grafique $f(x) = (cx)^3 + 1$, para $c = 1, 0.5, -1$.
4. Qué efecto tienen las transformaciones siguientes en la gráfica de $y = f(x)$?
- a) $y = -2f(x)$
- b) $y = f(x/2)$
- c) $y = f(x - 3) + 1$
- d) $y = 2f(x + 2) - 3$
- e) $y = 2f(|x|)$
5. Grafique las funciones siguientes.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 2 & , x < -1 \\ \sqrt{1 - x^2} & , -1 \leq x < 0 \\ 1 & , 0 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{2x - x^2} & , 1 < x \leq 2 \\ 2 - x & , x > 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} 1 & , |x| > 1 \\ 1 - \sqrt{1 - x^2} & , |x| \leq 1 \end{cases}$$

Respuestas para algunos ejercicios.

E1. a) par, b) impar, c) impar.

E2. par, $D = \mathbb{R}$, $R = [0, \infty)$

T1. a) impar, $D = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$, $R = \mathbb{R}$

b) par, $D = \mathbb{R}$, $R = [2, \infty)$

c) impar, $D = \mathbb{R}$, $R = \mathbb{R}$

T4. a) alargamiento vertical y reflexión en el eje Y,

b) alargamiento horizontal,

c) desplazamiento horizontal a la derecha y vertical hacia arriba,

d) alargamiento vertical, desplazamiento horizontal a la izquierda y desplazamiento hacia abajo,

e) alargamiento vertical, simétrica respecto al eje Y.

F. Las funciones cuadráticas.

Ejercicios

1. Grafique las funciones $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = \frac{1}{2}x^2$ y $f_3(x) = -\frac{1}{2}x^2$.

2. Encuentre el vértice, las intersecciones con el eje x y la dirección de las parábolas siguientes.

a) $y = 2x^2 - 6x + 4$

b) $y = -x^2 - 2x + 8$

3. Obtenga la ecuación de la parábola con vértice en $(2, 3)$ y que pasa por el punto $(5, 1)$.

Tareas

1. Encuentre la forma estándar, el vértice, el eje y las raíces de las parábolas siguientes.

a) $y = x(12 - 2x)$

b) $y = 6x^2 + 7x - 24$

c) $y = x^2 + 4x + 9$

Respuestas para algunos ejercicios.

E2. a) $V = (3/2, -1/2)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$, abre hacia arriba,

b) $V = (-1, 9)$, $(-4, 0)$, $(2, 0)$, abre hacia abajo.

E3. $y = 3 - \frac{2}{9}(x - 2)^2$

T1. a) $y = -2(x - 3)^2 + 18$, $V = (3, 18)$, $x = 3$, raíces: 0, 6,

b) $y = 6(x + 7/12)^2 - 625/24$, $V = (-7/12, -625/24)$, $x = -7/12$, raíces: $3/2, -8/3$,

c) $y = (x + 2)^2 + 5$, $V = (-2, 5)$, $x = -2$, no hay raíces reales.

G. Operaciones entre funciones.

Ejercicios

1. Para $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ y $g(x) = 3x + 1$, obtenga las funciones resultantes siguientes y sus dominios. También evalúe cada función en $x = 0$.

a) $h = f + g$

b) $j = f - g$

c) $k = fg$

d) $l = g/f$

2. Dadas $f(x) = 3x$ y $g(x) = \sqrt{1-x^2}$, obtenga la función $j = g \circ f$ y su dominio.

3. Para $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$ y $g(x) = \sqrt{x}$, obtenga las funciones $h = f \circ g$ y $j = g \circ f$ y sus dominios.

Tareas

1. Para $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ y $g(x) = 3x + 1$, obtenga las funciones $h = f \circ g$ y $j = g \circ f$ y sus dominios.

2. Para $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = x^2 - 1$, obtenga las funciones $h = f \circ g$ y $j = g \circ f$ y sus dominios.

Respuestas para algunos ejercicios.

E1. a) $h(x) = 3x + 1 + \sqrt{4-x^2}$, $D_h = [-2, 2]$, $h(0) = 3$,

b) $j(x) = \sqrt{4-x^2} - 3x - 1$, $D_j = [-2, 2]$, $j(0) = 1$,

c) $k(x) = (1 + 3x)\sqrt{4-x^2}$, $D_k = [-2, 2]$, $k(0) = 2$,

d) $l(x) = \frac{3x+1}{4-x^2}$, $D_l = (-2, 2)$, $l(0) = 1/2$

E2. $j(x) = \sqrt{1-9x^2}$, $D_j = [-1/3, 1/3]$

E3. $h(x) = \sqrt{x-16}$, $j(x) = \sqrt[4]{x^2-16}$, $D_h = [16, \infty)$, $D_j = [-4, 4]$

T1. $h(x) = \sqrt{3(1-2x-3x^2)}$, $D_h = [-1, 1/3]$, $j(x) = 3\sqrt{4-x^2} + 1$, $D_j = [-2, 2]$

T2. $h(x) = 2x^2 + 1$, $D_h = \mathbb{R}$, $j(x) = 4(x^2 + 3x + 2)$, $D_h = \mathbb{R}$

IV. FUNCIONES POLINOMIALES Y RACIONALES.

A. Polinomios.

Ejercicios

1. Obtenga las raíces y la gráfica del polinomio $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2$.

Tareas

1. Obtenga las raíces y la gráfica de los polinomios siguientes.

a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$

b) $f(x) = x^4 - 1$

c) $f(x) = 8x^3 + 27$

Respuestas para algunos ejercicios.

E1. $x = 0, 0, 1, 3$

T1. a) $x = 0, 2, 2$, b) $x = -1, 1, i, -i$, c) $x = -3/2, 3(1 \pm i\sqrt{3})/4$

B. División de polinomios.

Ejercicios

1. Calcule a) $(x^3 + 27)/(x + 3)$, b) $(x^3 + 27)/(x - 3)$.

2. Obtenga $(x^3 - 4x^2 + 3x + 2)/(x - 2)$.

Tareas

1. Calcule $(x^4 - 16)/(x - 2)$.

2. Utilice la división sintética para mostrar que $x = 11$ es raíz de la función $x^3 - 14x^2 + 29x + 44$. A partir de este procedimiento, obtenga las raíces restantes.

Respuestas para algunos ejercicios.

E1. a) $x^2 - 3x + 9$, b) $x^2 + 3x + 9 + \frac{54}{x - 3}$

E2. $x^2 - 2x - 1$

T1. $x^3 + 2x^2 + 4x + 8$

T2. $x = -1, 4, 11$

C. Las raíces de los polinomios.

Ejercicios

1. Obtenga la forma polinomial de la expresión $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$.

2. Encuentre el polinomio cúbico con raíces $x = -1, 2, 3$ y $f(1) = 5$.

3. Verifique que $x = -1$ es una raíz triple de $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 1$. Obtenga todas sus raíces y haga su gráfica.

4. Muestre que $x = -i$ es raíz de $f(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$.

Tareas

1. Muestre que $x = 1 + i$ es raíz de $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 2$.
2. Calcule $(x^3 - 4x^2 + 6x - 4)/(x^2 - 2x + 2)$ y use el resultado para encontrar todas las raíces de $x^3 - 4x^2 + 6x - 4$.

Respuestas para algunos ejercicios.

- E1. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$
E2. $f(x) = \frac{5}{4}(x^3 - 4x^2 + x + 6)$
E3. $x = -1, -1, -1, 1$
T2. $x = 2, 1 \pm i$

D. Las funciones racionales.

Ejercicios

1. Encuentre el dominio de las funciones siguientes.
 - a) $f(x) = \frac{5x}{x^2 - 9}$
 - b) $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 + 4}$
2. Indique las asíntotas verticales de las funciones siguientes.
 - a) $f(x) = \frac{5x}{x^2 - 9}$
 - b) $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 + 4}$
3. Encuentre la asíntota horizontal de las funciones siguientes.
 - a) $f(x) = \frac{5x}{x^2 - 9}$
 - b) $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 + 4}$
 - c) $f(x) = \frac{x - x^2}{x^2 + 1}$
4. Para $f(x) = \frac{3x + 4}{2x + 5}$, encuentre el dominio de la función, las raíces del numerador, las raíces del denominador, $f(0)$, todas las asíntotas, los signos de la función en la recta real y un esquema de la gráfica.
5. W es directamente proporcional al producto de u por v y es inversamente proporcional al cuadrado de s .
 - a) Escriba la ecuación que describe el enunciado anterior.
 - b) Si $W = 30$, cuando $u = 3$, $v = 5$ y $s = 2$, determine la constante de proporcionalidad.

c) Calcule el valor de W cuando $u = 7$, $v = 4$ y $s = 2$.

Tareas

1. Encuentre la asíntota horizontal de cada una de las funciones siguientes.

a) $f(x) = \frac{3x - 1}{x^2 - x - 6}$

b) $f(x) = \frac{5x^2 + 1}{3x^2 - 4}$

c) $f(x) = \frac{2x^4 - 3x^2 + 5}{x^2 + 1}$

2. Para cada una de las funciones racionales siguientes, encuentre el dominio, las raíces del numerador, las raíces del denominador, $f(0)$, todas las asíntotas, los signos de la función en la recta real y un esquema de la gráfica.

a) $f(x) = \frac{3x^2 - 7x + 4}{2x^2 - 7x + 5}$

b) $f(x) = \frac{2x^4}{x^4 + 1}$

c) $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - x - 6}$

d) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - x - 2}$

Respuestas para algunos ejercicios.

E1. a) $D = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, \infty)$, b) $D = \mathbb{R}$

E2. a) $x = 3, x = -3$, b) no tiene.

E3. a) $y = 0$, b) no tiene, c) $y = -1$

E4. $D = (-\infty, -5/2) \cup (-5/2, \infty)$, $x = -\frac{4}{3}, x = -\frac{5}{2}, f(0) = \frac{4}{5}$, AV : $x = -\frac{5}{2}$, AH : $y = \frac{3}{2}$

E5. a) $W = c\frac{uv}{s^2}$, b) $c = 8$, c) $W = 56$

T1. a) $y = 0$, b) $y = \frac{5}{3}$, c) no tiene.

T2. a) $D = (-\infty, \frac{5}{2}) \cup (\frac{5}{2}, \infty)$; $x = \frac{4}{3}, 1; x = \frac{5}{2}, 1; f(0) = \frac{4}{5}$;

AV: $x = \frac{5}{2}$; AH: $y = \frac{3}{2}$;

b) $D = \mathbb{R}$; $x = 0, 0, 0, 0$; no tiene raíces reales: $x^2 = \pm i; f(0) = 0$;

no tiene AV; AH: $y = 2$;

c) $D = (-\infty, -2) \cup (-2, 3) \cup (3, \infty)$; $x = 1; x = 3, -2; f(0) = \frac{1}{6}$;

AV: $x = 3, x = -2$; AH: $y = 0$;

d) $D = (-\infty, -1) \cup (-1, 2) \cup (2, \infty)$; $x = 0, 0; x = -1, 2; f(0) = 0$;

AV: $x = -1, x = 2$; AH: $y = 1$.

V. FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA.

A. La función inversa.

Ejercicios

1. Para la función $f(x) = \frac{3x+4}{2x-5}$, encuentre la función inversa, el dominio de cada función, las asíntotas y sus gráficas.

2. Obtenga la función inversa de $f(x) = x^3$ y grafique ambas funciones.

Tareas

1. Para cada una de las funciones siguientes, encuentre la función inversa y los dominios de las funciones.

a) $f(x) = \frac{1}{3x-2}$

b) $f(x) = \frac{4x}{x-2}$

c) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

d) $f(x) = (x^3+1)^5$

Respuestas para algunos ejercicios.

E1. $f^{-1}(x) = \frac{5x+4}{2x-3}$, $D_f = (-\infty, \frac{5}{2}) \cup (\frac{5}{2}, \infty)$, $D_{f^{-1}} = (-\infty, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$

E2. $f^{-1}(x) = x^{1/3}$

T1. a) $f^{-1}(x) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3x}$, $D_f = (-\infty, \frac{2}{3}) \cup (\frac{2}{3}, \infty)$, $D_{f^{-1}} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

b) $f^{-1}(x) = \frac{2x}{x-4}$, $D_f = (-\infty, 2) \cup (2, \infty)$, $D_{f^{-1}} = (-\infty, 4) \cup (4, \infty)$

c) $f_1(x) = \sqrt{4-x^2}$, $D_f = [-2, 0]$, $f_1^{-1}(x) = -\sqrt{4-x^2}$, $D_{f_1^{-1}} = [0, -2]$

$f_2(x) = \sqrt{4-x^2}$, $D_f = [0, 2]$, $f_2^{-1}(x) = \sqrt{4-x^2}$, $D_{f_2^{-1}} = [0, 2]$

d) $f^{-1}(x) = (y^{1/5} - 1)^{1/3}$, $D_f = \mathbb{R}$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

B. La función exponencial.

Ejercicios

1. Obtenga la simetría, las asíntotas y la gráfica de $f(x) = 2^{-x^2}$.

2. Calcule el capital después de 1, 5, 10 y 15 años si la tasa de rendimiento anual de 6% permanece constante. Suponga que el capital inicial es \$1.

Tareas

1. El crecimiento poblacional se puede aproximar por la función $y(t) = ca^t$, en donde t es

la variable que representa el tiempo , además a y c son constantes. La población de México en 1970 fue 48.2×10^6 , mientras que en 1980 fue 66.8×10^6 . Determine los valores de las constantes del modelo.

Respuestas para algunos ejercicios.

E1. Simétrica con respecto al eje Y, AH: $y = 0$, no tiene AV.

E2. $C(1) = \$1.06, C(5) = \$1.34, C(10) = \$1.79, C(15) = \2.40 .

T1. $a = 1.033, c = y_1 a^{-t_1} = 8.043 \times 10^{-21}$

C. La función exponencial natural.

Ejercicios

1. Identifique la paridad y grafique las funciones $\sinh(x)$, $\cosh(x)$ y $\tanh(x)$.

2. Encuentre las raíces de $f(x) = x^2(-2e^{-2x}) + 2xe^{-2x}$.

Tareas

1. Resuelva las ecuaciones siguientes.

a) $e^{x^2} = e^{7x-12}$

b) $e^{3x} = e^{2x-1}$

2. Encuentre las raíces de las funciones siguientes.

a) $f(x) = xe^x + e^x$

b) $f(x) = 2(xe^x)^2 + 2xe^{2x} + e^{2x}(1 + 2x)$

Respuestas para algunos ejercicios.

E1. Impar, par, impar.

E2. $x = 0, 1$

T1. a) $x = 3, 4$, b) $x = -1$

T2. a) $x = -1$, b) $x = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

D. La función logarítmica.

Ejercicios

1. Evalúe las expresiones siguientes.

a) $\log_{10} 100$

b) $\log_2 \frac{1}{32}$

c) $\log_9 3$

d) $\log_7 1$

e) $\log_3(-2)$

2. Resuelva las ecuaciones siguientes.

a) $\log_6(4x - 5) = \log_6(2x + 1)$

b) $\log_4(5 + x) = 3$

3. Resuelva las ecuaciones siguientes.

a) $\log x = 1.4$

b) $\ln 2x = 2$

4. La magnitud de los terremotos, en la escala Richter, del 20 de septiembre de 1985 y del 18 de abril de 2014 fue 7.3 y 7.2, respectivamente. Calcule la intensidad relativa del primero, respecto al segundo.

Tareas

1. Los terremotos del 19 y 20 de septiembre de 1985 tuvieron magnitudes, en la escala de Richter, de 8.1 y 7.3, respectivamente. Cuántas veces más intenso fue el primero respecto al segundo?

2. El cambio de temperatura (T) de un objeto caliente, en contacto con el medio ambiente, en función del tiempo (t) puede modelarse mediante la ecuación $T(t) = T_a - (T_a - T_0)e^{-at}$, en donde T_a es la temperatura del ambiente, T_0 es la temperatura inicial del objeto y a es una constante característica del objeto. En el laboratorio de Termodinámica determinó que el valor de la constante a de un vaso de unicel con agua es 0.040 min^{-1} . Si $T_a = 20.0 \text{ °C}$ y $T_0 = 80.0 \text{ °C}$, resuelva los problemas siguientes.

a) Cuál es la temperatura del agua después de 10 min?

b) Cuál es la temperatura después de 25 min?

c) Qué ocurre cuando $t \rightarrow \infty$?

d) Cuándo se alcanza la temperatura de 40 °C ?

Respuestas para algunos ejercicios.

E1. a) 2, b) -5 , c) $\frac{1}{2}$, d) 0, e) no está definido.

E2. a) $x = 3$, b) $x = 59$

E3. a) $x = 10^{1.4} \approx 25.1$, b) $x = \frac{1}{2}e^2$

E4. $10^{0.1} \approx 1.26$

T1. $10^{0.8} \approx 6.31$

T2. a) 60.2°C, b) 42.1°C, c) 20.0°C, d) 27.5min

E. Las propiedades de los logaritmos.

Ejercicios

1. Agrupe todos los términos de la expresión $3 \log_a(x^2 - 1) - \log_a y - 4 \log_a(z + 1)$ dentro del argumento de la función logaritmo.

2. Resuelva las ecuaciones siguientes.

a) $\log_5(2x + 3) = \log_5 11 + \log_5 3$

b) $\ln(x + 6) - \ln 10 = \ln(x + 1) - \ln 2$

3. Simplifique la ecuación $y = \log_3(81x^2)$ y haga su gráfica.

4. Transforme la expresión $\log_\pi e$ en una equivalente que use logaritmos naturales.

5. Resuelva las ecuaciones siguientes.

a) $3^x = 21$

b) $5^{2y+1} = 6^{y-2}$

Tareas

1. Resuelva las ecuaciones siguientes.

a) $(5^z - 5^{-z})/2 = 3$

b) $\log \sqrt[3]{w} = \sqrt{\log w}$

2. Despeje la variable x de la expresión $y = 2/(e^x + e^{-x})$ y grafique la ecuación original y el resultado.

Respuestas para algunos ejercicios.

E1. $\log_a \frac{(x^2 - 1)^3}{y(z + 1)^4}$

E2. a) $x = 15$, b) $x = \frac{1}{4}$

E3. $y = 4 + 2 \log_3 x$

E4. $\frac{1}{\ln \pi}$

E5. a) $x = 1 + \frac{\ln 7}{\ln 3}$, b) $y = -\frac{\ln 180}{\ln 25/6}$

T1. a) $z = \frac{\ln(3 + \sqrt{10})}{\ln 5}$, b) $w = 1, 10^9$

T2. $x = g_1(y) = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y}$, $x = g_2(y) = \ln \frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y}$

VI. SISTEMAS DE ECUACIONES Y DESIGUALDADES.

A. Sistemas de ecuaciones.

Ejercicios

1. Resuelva cada uno de los sistemas de ecuaciones siguientes.

a) $x + y^2 = 6, x + 2y = 3.$

b) $x^2 + y^2 = 25, x^2 + y = 19.$

c) $x - y + z = 2, xyz = 0, 2y + z = 1$

2. Se desea construir un acuario con la forma de un prisma de base cuadrada. El volumen debe ser igual a 16 m^3 y la cantidad de material disponible es 40 m^2 . Calcule las dimensiones del acuario.

Tareas

1. Resuelva cada uno de los sistemas de ecuaciones siguientes.

a) $y = x^2 - 4, y = 2x - 1.$

b) $y^2 = 1 - x, x + 2y = 1.$

c) $2y = x^2, y = 4x^3.$

2. Para el sistema de ecuaciones $\{x^2 + y^2 = 4, y = x + b\}$, encuentre el valor de la constante b para el cual el sistema tiene sólo una solución.

Respuestas para algunos ejercicios.

E1. a) $x = -3, y = 3; x = 5, y = -1,$ b) $y = 3, x = \pm 4; y = -2, x = \pm\sqrt{21},$

c) $x = 0, y = -\frac{1}{3}, z = \frac{5}{3}; x = 1, y = 0, z = 1; x = \frac{5}{2}, y = \frac{1}{2}, z = 0$

E2. $1.73\text{m} \times 1.73\text{m} \times 5.36\text{m}, 5.29\text{m} \times 5.29\text{m} \times 0.57\text{m}$

T1. a) $x = 3, y = 5; x = -1, y = -3,$ b) $x = 1, y = 0; x = -3, y = 2,$

c) $x = 0, y = 0; x = \frac{1}{8}, y = \frac{1}{128}$

T2. $b = 2\sqrt{2} : x = -\sqrt{2}, y = \sqrt{2}; b = -2\sqrt{2} : x = \sqrt{2}, y = -\sqrt{2}$

B. Sistemas de dos ecuaciones lineales.

Ejercicios

1. Resuelva los sistemas de ecuaciones siguientes.

a) $\{4x + 7y = 11, 3x - 2y = -9\}$

b) $\{2x + 3y = 2, x - 2y = 8\}$

- c) $\{\frac{1}{3}c + \frac{1}{2}d = 5, c - \frac{2}{3}d = -1\}$
 d) $\{\sqrt{5}x + \sqrt{3}y = 14\sqrt{3}, \sqrt{3}x - 2\sqrt{5}y = -2\sqrt{5}\}$

Tareas

1. Resuelva los sistemas de ecuaciones siguientes.

- a) $\{x + 2y = 3, 4x + 5y = 6\}$
 b) $\{x + 3y = 2, 4x + 12y = 8\}$
 c) $\{a + \frac{1}{3}b = \frac{4}{3}, a - \frac{1}{6}b = \frac{5}{6}\}$
 d) $\{\sqrt{2}x + y = 4, 2x - y = 2(\sqrt{2} - 1)\}$

Respuestas para algunos ejercicios.

- E1. a) $x = \frac{-41}{29}, y = \frac{69}{29}$, b) $x = 4, y = -2$, c) $c = \frac{51}{13}, d = \frac{96}{13}$, d) $x = 2\sqrt{15}, y = 4$
 T1. a) $x = -1, y = 2$, b) $y \in \mathbb{R}, x = 2 - 3y$, c) $a = 1, b = 1$, d) $x = \sqrt{2}, y = 2$

C. Sistemas de ecuaciones lineales con más de dos variables.

Ejercicios

1. Resuelva los sistemas de ecuaciones siguientes.

- a) $\{2x - 3y = 12, 3y + z = -2, 5x - 3z = 3\}$
 b) $\{2x - y + 4z = 8, -3x + y - 2z = 5\}$

Tareas

1. Resuelva los sistemas de ecuaciones siguientes.

- a) $\{4x - 3y = 1, 2x + y = -7, y - x = -1\}$
 b) $\{x - 2y - 3z = -1, 2x + y + z = 6, x + 3y - 2z = 13\}$

Respuestas para algunos ejercicios.

- E1. a) $x = 3, y = -2, z = 4$, b) $x = -13 + 2z, y = -34 + 8z, z \in \mathbb{R}$
 T1. a) $x = -2, y = -3$, b) $x = 2, y = 3, z = -1$

D. Sistemas de desigualdades.

Ejercicios

1. Represente en el plano cartesiano la solución de cada uno de los sistemas de desigualdades siguientes.

- a) $\{x \geq 0, y \leq 0\}$

b) $\{x + y \leq 4, 2x - y \geq 4\}$

Tareas

1. Represente en el plano cartesiano la solución de cada uno de los sistemas de desigualdades siguientes.

a) $\{x + y \leq 4, 2x - y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$

b) $\{x^2 + y^2 < 16, x + y \geq 2\}$

c) $\{|x| \leq 2, |y| > 1\}$

VII. LAS SECCIONES CÓNICAS.

A. La parábola.

Ejercicios

1. Encuentre los parámetros característicos de la parábola $2x = y^2 + 8y + 22$ y haga su gráfica.

2. Obtenga la ecuación de la parábola con vértice en $(-4, 2)$ y con directriz $y = 5$ y gráfiquela.

3. Encuentre la distancia focal de una antena parabólica de 12 m de diámetro y 2 m de altura.

Tareas

1. Encuentre los parámetros característicos de las parábolas siguientes y haga sus gráficas.

a) $8y = x^2$

b) $x^2 = -3y$

c) $x^2 + 10y = 10$

d) $y^2 - 4y - 2x - 4 = 0$

Respuestas para algunos ejercicios.

E1. $V = (3, -4)$, eje: $y = -4$, $F = (\frac{7}{2}, 4)$, directriz: $x = \frac{5}{2}$

E2. $y = -\frac{1}{12}(x + 4)^2 + 2$

E3. $p = 4.5\text{m}$

T1. a) $V = (0, 0)$, $F(0, 2)$, eje: $x = 0$, directriz: $y = -2$,

b) $V = (0, 0)$, $F = (0, -\frac{3}{4})$, eje: $x = 0$, directriz: $y = \frac{3}{4}$,

c) $V = (0, -1)$, $F = (0, -\frac{7}{2})$, eje: $x = 0$, directriz: $y = \frac{3}{2}$,

d) $V = (-4, 2)$, $F = (-2, 2)$, eje: $y = 2$, directriz: $x = -6$

B. La elipse.

Ejercicios

- Encuentre los parámetros característicos de la elipse $9x^2 + 4y^2 = 25$ y haga su gráfica.
- Obtenga la ecuación y la gráfica de la elipse con vértices en $(\pm 4, 0)$ y focos en $(\pm 2, 0)$.
- Encuentre los parámetros característicos de la elipse $16x^2 + 9y^2 + 64x - 18y - 71 = 0$ y haga su gráfica.
- La órbita del cometa Halley tiene una excentricidad de 0.967 y la distancia mínima al sol es 0.587 AU. Calcule la distancia máxima al sol.

Tareas

- Encuentre los parámetros característicos de las elipses siguientes y haga sus gráficas.
 - $4x^2 + y^2 = 16$
 - $4x^2 + 9y^2 - 32x - 36y + 64 = 0$
 - $4x^2 + y^2 - 2y = 0$
- Obtenga la ecuación y la gráfica de las elipses siguientes.
 - Con vértices en $(0, \pm 4)$ y $e = 3/4$.
 - Con vértices en $(0, \pm 6)$ y que pasa por el punto $(3, 2)$.

Respuestas para algunos ejercicios.

E1. $C = (0, 0)$, $a = \frac{5}{2}$, $b = \frac{5}{3}$, $c = \frac{5}{6}\sqrt{5}$, $F = (0, \pm \frac{5}{6}\sqrt{5})$, $V = (0, \pm \frac{5}{2})$, $M = (\pm \frac{5}{3}, 0)$

E2. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

E3. $C = (-2, 1)$, $a = 4$, $b = 3$, $c = \sqrt{7}$, $F = (-2, 1 \pm \sqrt{7})$, $V = (-2, 1 \pm 4)$, $M = (-2 \pm 3, 1)$

E4. 35.0AU

T1. a) $C = (0, 0)$, $a = 4$, $b = 2$, $c = 2\sqrt{3}$, $F = (0, \pm 2\sqrt{3})$, $V = (0 \pm 4)$, $M = (\pm 2, 0)$,

b) $C = (4, 2)$, $a = 3$, $b = 2$, $c = \sqrt{5}$, $F = (4 \pm \sqrt{5}, 2)$, $V = (4 \pm 3, 2)$, $M = (4, 2 \pm 2)$,

c) $C = (0, 1)$, $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $F = (0, 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2})$, $V = (0, 1 \pm 1)$, $M = (\pm \frac{1}{2}, 1)$

T2. a) $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{16} = 1$, b) $\frac{x^2}{81/8} + \frac{y^2}{36} = 1$

C. La hipérbola.

Ejercicios

1. Obtenga la ecuación y la gráfica de la hipérbola con vértices en $(\pm 3, 0)$ y que pasa por el punto $(5, 2)$.

2. Encuentre los parámetros característicos de las hipérbolas siguientes y haga sus gráficas.

a) $\frac{1}{4}(x+2)^2 - \frac{1}{9}(y+2)^2 + 1 = 0$

b) $9x^2 - 4y^2 - 54x - 16y + 29 = 0$

c) $y^2 - 4x^2 - 12y - 16x + 16 = 0$

Tareas

1. Encuentre los parámetros característicos de las hipérbolas siguientes y gráfíquelas.

a) $x^2 - \frac{y^2}{24} + 1 = 0$

b) $y^2 - 16x^2 = 1$

c) $\frac{(x-3)^2}{25} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

d) $144x^2 - 25y^2 + 864x - 100y - 2404 = 0$

2. Obtenga la ecuación y la gráfica de las hipérbolas siguientes.

a) Con focos en $(0, \pm 4)$ y vértices en $(0, \pm 1)$.

b) Con interceptos en $(\pm 5, 0)$ y asíntotas $y = \pm 2x$.

Respuestas para algunos ejercicios.

E1. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{\frac{9}{4}} = 1$

E2. a) $C = (-2, -2), a = 3, b = 2, c = \sqrt{13}, V = (-2, -2 \pm 3), F = (-2, -2 \pm \sqrt{13}),$
 $W = (-2 \pm 2, -2), \text{AO: } y = -2 \pm 3 \pm \frac{3x}{2},$

b) $C = (3, -2), a = 2, b = 3, c = \sqrt{13}, V = (3 \pm 2, -2), F = (3 \pm \sqrt{13}, -2),$
 $W = (3, -2 \pm 3), \text{AO: } y = -2 \mp \frac{9}{2} \pm \frac{3x}{2},$

c) $C = (-2, 6), a = 2, b = 1, c = \sqrt{5}, V = (-2, 6 \pm 2), F = (-2, 6 \pm \sqrt{5}),$
 $W = (-2 \pm 1, 6), \text{AO: } y = 6 \pm 4 \pm 2x$

T1. a) $C = (0, 0), a = 2\sqrt{6}, b = 1, c = 5, V = (\pm 2\sqrt{6}, 0), F = (\pm 5, 0),$
 $W = (0, \pm 1), \text{AO: } y = \pm 2\sqrt{6}x,$

b) $C = (0, 0), a = 1, b = \frac{1}{4}, c = \frac{\sqrt{17}}{4}, V = (\pm 1, 0), F = (\pm \frac{\sqrt{17}}{4}, 0),$
 $W = (0, \pm \frac{1}{4}), \text{AO: } y = \pm 4x,$

c) $C = (3, 1), a = 5, b = 2, c = \sqrt{29}, V = (3 \pm 5, 1), F = (3 \pm \sqrt{29}, 1),$
 $W = (3, 1 \pm 2), \text{AO: } y = 1 \mp \frac{6}{5} \pm \frac{2x}{5},$

d) $C = (-3, -2), a = 5, b = 12, c = 13, V = (-3 \pm 5, -2), F = (-3 \pm 13, -2),$

$$W = (-3, -2 \pm 12), \text{AO: } y = -2 \pm \frac{36}{5} \pm \frac{12x}{5}$$

$$\text{T2. a) } y^2 - \frac{x^2}{15} = 1, \text{ b) } \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{100} = 1$$

VIII. FIGURAS.

FIG. 1. Registro de la temperatura en la Cd. de México en abril de 2014.

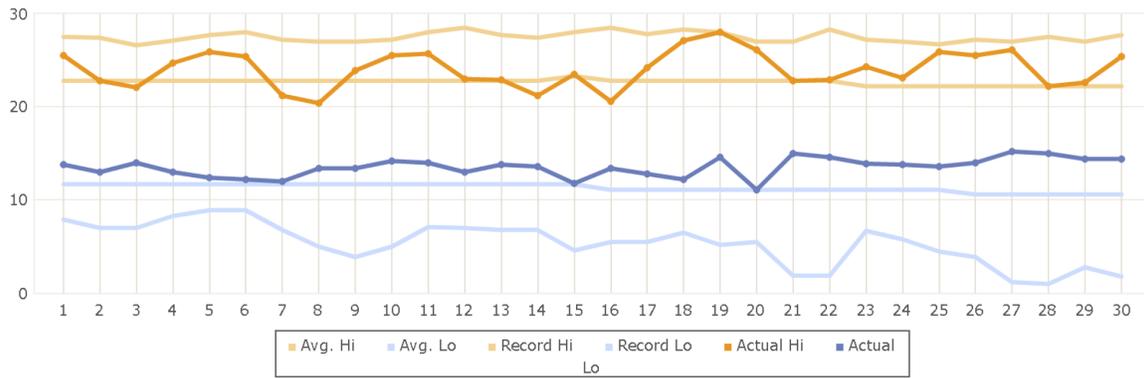


FIG. 2. Secciones cónicas.

