Capítulo 6. El momento angular

6. El momento angular

El momento angular es una propiedad muy importante, tanto en los sistemas macroscópicos, como en los microscópicos. Está asociado con el movimiento rotacional y con el espín de las partículas microscópicas. Además, en muchos casos permanece constante, es decir, es una constante de movimiento.

6.1. Los operadores de momento angular

Los operadores del momento angular se construyen siguiendo las reglas antes mencionadas. Por esta razón es necesario partir de su forma clásica,

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \, . \tag{6.1}$$

Para trabajar con las componentes cartesianas es conveniente introducir el símbolo de Levi-Civitta, ε_{ijk}, que es una cantidad que depende de tres índices y que sólo es distinta de cero si sus tres índices son diferentes,

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & ,2 \text{ o } 3 \text{ índices iguales} \\ +1 & ,(i\ j\ k) \text{ es permutación cíclica de} (1\,2\,3) \\ -1 & ,(i\ j\ k) \text{ no es permutación cíclica de} (1\,2\,3) \end{cases} \, . \tag{6.2}$$

Este símbolo posee las propiedades siguientes,

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij} = \varepsilon_{jki}, \qquad \varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}, \qquad \sum_k \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \, . \tag{6.3}$$

Así, las componentes del momento angular pueden escribirse en la forma

$$L_l = \sum_{jk} \varepsilon_{ljk} r_j p_k \, , \tag{6.4}$$

en donde r_j y p_k son las componentes cartesianas de los vectores de posición y de momento lineal, y las componentes 1, 2 y 3 corresponden a x, y y z, respectivamente. Así mismo, los operadores del momento angular quedan expresados como

$$\hat{L}_l = \sum_{jk} \varepsilon_{ljk} \hat{r}_j \hat{p}_k = -i\hbar \sum_{jk} \varepsilon_{ljk} r_j \frac{\partial}{\partial r_k} \, . \tag{6.5}$$

Se puede demostrar fácilmente que estos operadores son hermitianos.

Estos operadores pueden escribirse en coordenadas esféricas y resultan independientes de la variable radial,

$$\begin{aligned}
\hat{L}_1 &= -i\hbar\left\{-\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \cos\varphi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right\} \\
\hat{L}_2 &= -i\hbar\left\{\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\varphi\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right\} \quad , \\
\hat{L}_3 &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}
\end{aligned} \tag{6.6}$$

en particular, la componente z toma una forma más sencilla. Además, el operador $\hat{L}^2$ está contenido en el operador laplaciano, cuando este último está en coordenadas polares:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\hat{L}^2}{\hbar^2}\right). \tag{6.7}$$

6.1.1. Los conmutadores

Las propiedades de conmutación de los operadores de momento angular presentan ciertas regularidades,

$$\begin{aligned}
\left[\hat{L}_l, \hat{r}_m\right] &= \sum_{jk}\varepsilon_{ljk}\left[\hat{r}_j\hat{p}_k, \hat{r}_m\right] = \sum_{jk}\varepsilon_{ljk}\hat{r}_j\left[\hat{p}_k, \hat{r}_m\right] = -i\hbar\sum_{jk}\varepsilon_{ljk}\hat{r}_j\delta_{km} = i\hbar\sum_j\varepsilon_{lmj}\hat{r}_j \\
\left[\hat{L}_l, \hat{p}_m\right] &= \sum_{jk}\varepsilon_{ljk}\left[\hat{r}_j\hat{p}_k, \hat{p}_m\right] = \sum_{jk}\varepsilon_{ljk}\left[\hat{r}_j, \hat{p}_m\right]\hat{p}_k = i\hbar\sum_{jk}\varepsilon_{ljk}\delta_{jm}\hat{p}_k = i\hbar\sum_k\varepsilon_{lmk}\hat{p}_k
\end{aligned} \quad , \tag{6.8}$$

$$\begin{aligned}
\left[\hat{L}_l, \hat{L}_m\right] &= \sum_{jk}\varepsilon_{ljk}\left[\hat{r}_j\hat{p}_k, \hat{L}_m\right] = \sum_{jk}\varepsilon_{ljk}\left\{\hat{r}_j\left[\hat{p}_k, \hat{L}_m\right] + \left[\hat{r}_j, \hat{L}_m\right]\hat{p}_k\right\} \\
&= -i\hbar\sum_{jkn}\varepsilon_{ljk}\hat{r}_j\varepsilon_{mkn}\hat{p}_n - i\hbar\sum_{jkn}\varepsilon_{ljk}\varepsilon_{mjn}\hat{r}_n\hat{p}_k = -i\hbar\sum_{jnk}\varepsilon_{ljk}\varepsilon_{nmk}\hat{r}_j\hat{p}_n - i\hbar\sum_{knj}\varepsilon_{klj}\varepsilon_{nmj}\hat{r}_n\hat{p}_k \\
&= -i\hbar\sum_{jn}\left(\delta_{ln}\delta_{jm} - \delta_{lm}\delta_{jn}\right)\hat{r}_j\hat{p}_n - i\hbar\sum_{kn}\left(\delta_{kn}\delta_{lm} - \delta_{km}\delta_{ln}\right)\hat{r}_n\hat{p}_k \\
&= -i\hbar\sum_{jn}\left(\delta_{ln}\delta_{jm} - \delta_{lm}\delta_{jn} + \delta_{jn}\delta_{lm} - \delta_{nm}\delta_{lj}\right)\hat{r}_j\hat{p}_k = -i\hbar\sum_{kjn}\varepsilon_{lmk}\varepsilon_{njk}\hat{r}_j\hat{p}_n \\
&= i\hbar\sum_k\varepsilon_{lmk}\hat{L}_k
\end{aligned} \quad . \tag{6.9}$$

En general, $\left[\hat{L}_l,\hat{Y}_m\right]=i\hbar\sum_k \varepsilon_{lmk}\hat{Y}_k$, en donde $Y=r,p,L$. Observe que si l y m son diferentes, k también debe serlo para que el conmutador sea distinto de cero. Por tanto, la operación de conmutación puede asociarse con una rotación en la dirección del operador del momento angular, l.

Adicionalmente, las componentes del momento angular conmutan con $\hat{L}^2$,

$$\begin{aligned}\left[\hat{L}_l,\hat{L}^2\right]&=\left[L_l,\sum_k \hat{L}_k^2\right]=\sum_k\left(\left[L_l,\hat{L}_k\right]\hat{L}_k+\hat{L}_k\left[\hat{L}_l,\hat{L}_k\right]\right)=\sum_{km}\left\{\varepsilon_{lkm}\hat{L}_m\hat{L}_k+\hat{L}_k\varepsilon_{lkm}\hat{L}_m\right\}i\hbar\\ &=i\hbar\left(\sum_{km}\varepsilon_{lkm}\hat{L}_m\hat{L}_k+\sum_{km}\varepsilon_{lmk}\hat{L}_m\hat{L}_k\right)=i\hbar\sum_{km}\left(\varepsilon_{lkm}+\varepsilon_{lmk}\right)\hat{L}_m\hat{L}_k=0\end{aligned}, \quad (6.10)$$

sin embargo, los operadores $\hat{L}_k$ no conmutan entre ellos.

Es posible seleccionar a una pareja de operadores que conmutan. Considere a $\hat{L}^2$ y $\hat{L}_z$. Como $\left[\hat{L}^2,\hat{L}_z\right]=0$, entonces, ambos operadores tienen funciones propias comunes. Si el ket $\left|\Psi\right\rangle$ denota a las funciones propias de ambos operadores, se cumplen las ecuaciones

$$\hat{L}^2\left|\Psi\right\rangle=\hbar^2 a\left|\Psi\right\rangle, \qquad \hat{L}_z\left|\Psi\right\rangle=\hbar b\left|\Psi\right\rangle, \quad (6.11)$$

en donde a y b son los valores propios correspondientes. Como $\left\langle\hat{L}^2\right\rangle=\left\langle\hat{L}_x^2+\hat{L}_y^2+\hat{L}_z^2\right\rangle$, entonces

$$\begin{aligned}\left\langle\Psi\right|\hat{L}^2\left|\Psi\right\rangle&=a\hbar^2=\left\langle\Psi\right|\hat{L}_x^2\left|\Psi\right\rangle+\left\langle\Psi\right|\hat{L}_y^2\left|\Psi\right\rangle+\left\langle\Psi\right|\hat{L}_z^2\left|\Psi\right\rangle\\ &=\left\langle\hat{L}_x\Psi\middle|\hat{L}_x\Psi\right\rangle+\left\langle\hat{L}_y\Psi\middle|\hat{L}_y\Psi\right\rangle+\hbar^2b^2\geq\hbar^2b^2\end{aligned}, \quad (6.12)$$

por lo tanto,

$$a\geq b^2, \qquad \left|b\right|\leq\sqrt{a}, \qquad -\sqrt{a}\leq b\leq\sqrt{a}. \quad (6.13)$$

Esto es, los valores de b están acotados.

6.1.2. Los operadores de ascenso y descenso

Para el tratamiento posterior se definen los operadores siguientes

$$\hat{L}_{\pm} \equiv \hat{L}_1 \pm i\hat{L}_2 . \tag{6.14}$$

Estos operadores no son hermitianos, pero son adjuntos uno de otro. Al operador $\hat{L}_+$ se le denomina operador de ascenso y a $\hat{L}_-$ operador de descenso. En forma similar al caso del oscilador armónico, los operadores de las componentes se pueden escribir como combinación de los operadores nuevos:

$$\hat{L}_x = \hat{L}_1 = \frac{1}{2}\left(\hat{L}_+ + \hat{L}_-\right), \qquad \hat{L}_y = \hat{L}_2 = \frac{i}{2}\left(\hat{L}_- - \hat{L}_+\right). \tag{6.15}$$

Estos operadores tiene las propiedades de conmutación siguientes,

$$\begin{aligned}
&\left[\hat{L}^2,\hat{L}_{\pm}\right] = \left[\hat{L}^2,\hat{L}_1\right] \pm i\left[\hat{L}^2,\hat{L}_2\right] = 0 ,\\
&\begin{aligned}\left[\hat{L}_+,\hat{L}_-\right] &= \left[\hat{L}_1 + i\hat{L}_2,\hat{L}_1 - i\hat{L}_2\right] = -i\left[\hat{L}_1 - \hat{L}_2\right] + i\left[\hat{L}_2 - \hat{L}_1\right] = -2i\left[\hat{L}_1,\hat{L}_2\right] \\ &= -2i\left(i\hbar\hat{L}_3\right) = 2\hbar\hat{L}_3 = 2\hbar\hat{L}_z\end{aligned} ,\\
&\begin{aligned}\left[\hat{L}_3,\hat{L}_{\pm}\right] &= \left[\hat{L}_3,\hat{L}_1\right] \pm i\left[\hat{L}_3,\hat{L}_2\right] = i\hbar\hat{L}_2 \pm i\left(i\hbar\right)\left(-\hat{L}_1\right) = \hbar\left(i\hat{L}_2 \pm \hat{L}_1\right) = \pm\hbar\left(\hat{L}_1 \pm i\hat{L}_2\right) \\ &= \pm\hbar\hat{L}_{\pm}\end{aligned} .
\end{aligned} \tag{6.16}$$

Además

$$\begin{aligned}
&\begin{aligned}\hat{L}_+\hat{L}_- &= \left(\hat{L}_1 + i\hat{L}_2\right)\left(\hat{L}_1 - i\hat{L}_2\right) = \hat{L}_1^2 + \hat{L}_2^2 + i\hat{L}_2\hat{L}_1 - i\hat{L}_1\hat{L}_2 = \hat{L}^2 - \hat{L}_3^2 - i\left(i\hbar\right)\hat{L}_3 \\ &= \hat{L}^2 - \hat{L}_3^2 + \hbar\hat{L}_3\end{aligned} ,\\
&\hat{L}_-\hat{L}_+ = \hat{L}_+\hat{L}_- - \left[\hat{L}_+,\hat{L}_-\right] = \hat{L}^2 - \hat{L}_3^2 + \hbar\hat{L}_3 - 2\hbar\hat{L}_3 = \hat{L}^2 - \hat{L}_3^2 - \hbar\hat{L}_3 ,\\
&\hat{L}_{\pm}\hat{L}_{\mp} = \hat{L}^2 - \hat{L}_3^2 \pm \hbar\hat{L}_3 .
\end{aligned} \tag{6.17}$$

6.2. El método algebraico

Para obtener los valores propios y las funciones propias también se usará un método algebraico. Este método utiliza a los operadores de ascenso y descenso.

Al aplicar estos operadores a las ecuaciones de valores propios, se tiene que

$$\hat{L}_{\pm}\hat{L}_z\left|\Psi\right\rangle = b\hbar\hat{L}_{\pm}\left|\Psi\right\rangle = \left(\hat{L}_z\hat{L}_{\pm} - \left[\hat{L}_z,\hat{L}_{\pm}\right]\right)\left|\Psi\right\rangle = \hat{L}_z\hat{L}_{\pm}\left|\Psi\right\rangle \mp \hbar\hat{L}_{\pm}\left|\Psi\right\rangle ,$$

$$\hat{L}_z\left(\hat{L}_\pm\left|\Psi\right\rangle\right)=\hbar\left(b\pm1\right)\left(\hat{L}_\pm\left|\Psi\right\rangle\right), \qquad \hat{L}_\pm\hat{L}^2\left|\Psi\right\rangle=a\hbar^2\hat{L}_\pm\left|\Psi\right\rangle=\hat{L}^2\left(\hat{L}_\pm\left|\Psi\right\rangle\right). \tag{6.18}$$

Por lo tanto, $\hat{L}_\pm\left|\Psi\right\rangle$ es función propia de $\hat{L}^2$ con valor propio $a\hbar^2$ y de $\hat{L}_z$ con valor propio $\left(b\pm1\right)\hbar$. Por esta razón reciben su nombre.

Dado que las funciones propias están caracterizadas por sus valores propios, para distinguirlas se usan estos valores propios como sus índices,

$$\left|\Psi\right\rangle=\left|\Psi_{ab}\right\rangle=\left|ab\right\rangle. \tag{6.19}$$

Al aplicar los operadores de ascenso y descenso se tiene que

$$\hat{L}_\pm\left|ab\right\rangle=C_{ab}^{\pm}\left|a,b\pm1\right\rangle, \tag{6.20}$$

en donde los coeficientes se obtienen de la condición de normalización,

$$\begin{aligned}\left\langle\hat{L}_\pm\Psi_{ab}\middle|\hat{L}_\pm\Psi_{ab}\right\rangle&=\left\langle ab\middle|\hat{L}_\mp\hat{L}_\pm\middle|ab\right\rangle=\left\langle ab\middle|\hat{L}^2-\hat{L}_3^2\mp\hat{L}_3\hbar\middle|ab\right\rangle\\&=\left|C_{ab}^{\pm}\right|^2\left\langle a,b\pm1\middle|a,b\pm1\right\rangle=\left(a\hbar^2-b^2\hbar^2\mp\hbar^2b\right)\left\langle ab\middle|ab\right\rangle\end{aligned}, \tag{6.21}$$

por lo tanto,

$$C_{ab}^{\pm}=\hbar\sqrt{a-b^2\mp b}, \tag{6.22}$$

y

$$\hat{L}_\pm\left|ab\right\rangle=\hbar\sqrt{a-b^2\mp b}\left|a,b\pm1\right\rangle. \tag{6.23}$$

6.2.1. Los valores propios

Como el espectro está acotado, considere que b_M es el valor máximo de b, entonces $\hat{L}_+\left|ab_M\right\rangle=0$ y

$$\left\langle\hat{L}_+\Psi_{ab_M}\middle|\hat{L}_+\Psi_{ab_M}\right\rangle=\left\langle ab_M\middle|\hat{L}_-\hat{L}_+\middle|ab_M\right\rangle=\hbar^2\left(a-b_M^2-b_M\right)=0, \tag{6.24}$$

por lo que $a=b_M\left(b_M+1\right)$.

Sea b_m el valor mínimo de b, como $\hat{L}_-\left|ab_m\right\rangle = 0$ y

$$\left\langle \hat{L}_-\Psi_{ab_m} \middle| \hat{L}_-\Psi_{ab_m} \right\rangle = \left\langle ab_m \middle| \hat{L}_+\hat{L}_- \middle| ab_m \right\rangle = \hbar^2\left(a - b_m^2 + b_m\right) = 0 \tag{6.25}$$

entonces $a = b_m\left(b_m - 1\right)$.

Aplicando n veces $\hat{L}_+$ al ket $\left|ab_m\right\rangle$, eventualmente se llega a $\left|ab_M\right\rangle$,

$$\hat{L}_+^n\left|ab_m\right\rangle = k\left|ab_M\right\rangle, \tag{6.26}$$

entonces b_M y b_m difieren en un entero, $b_M = b_m + n$, así,

$$\begin{aligned} a &= b_m\left(b_m - 1\right) = b_M\left(b_M + 1\right) = \left(b_m + n\right)\left(b_m + n + 1\right) \\ &= b_m^{\ 2} - b_m = b_m^{\ 2} + 2nb_m + b_m + n^2 + n \\ 0 &= 2b_m\left(n+1\right) + n\left(n+1\right) \end{aligned} \quad . \tag{6.27}$$

Por lo tanto,

$$b_m = -\frac{n}{2}, \qquad\qquad b_M = -\frac{n}{2} + n = \frac{n}{2} = -b_m . \tag{6.28}$$

Es decir, b_M puede ser un entero o un semientero.

Para valores enteros, se acostumbra denotar al valor máximo con la letra l, $b_M = l$, en donde $l = 0,1,2,\ldots$, entonces, $a = l\left(l+1\right)$. en forma similar el símbolo tradicional para b, es la letra m, $b = m$. Por tanto, l y m son suficientes para caracterizar a cada función propia, en donde

$$-l = b_m \le m \le b_M = l, \qquad\qquad \Psi_{ab} = Y_{lm} = \left|lm\right\rangle,$$

$$\hat{L}^2\left|lm\right\rangle = \hbar^2 l\left(l+1\right)\left|lm\right\rangle, \qquad\qquad \hat{L}_z\left|lm\right\rangle = \hbar m\left|lm\right\rangle,$$

(6.29)

$$\hat{L}_\pm\left|lm\right\rangle = \hbar\sqrt{l\left(l+1\right) - m^2 \mp m}\left|l, m\pm 1\right\rangle = \hbar\sqrt{\left(l \pm m + 1\right)\left(l \mp m\right)}\left|l, m\pm 1\right\rangle .$$

6.2.2. Las funciones propias

Las funciones propias están relacionadas entre sí por medio de los operadores de ascenso y descenso. En particular, para los valores máximo y mínimo de m se tiene que

$$\hat{L}_{\pm}\left|l,\pm l\right\rangle = 0\,, \qquad \hbar e^{\pm i\varphi}\left\{\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right\}Y_{l,\pm l} = 0\,. \tag{6.30}$$

Como la ecuación diferencial es separable, entonces se propone una solución de la forma $Y_{l,\pm l}\left(\theta,\varphi\right) = \Phi_{\pm l}\left(\varphi\right)\Theta_{l,\pm l}\left(\theta\right)$, así,

$$\pm\tan\theta\frac{\Theta'_{l,\pm l}}{\Theta_{l,\pm l}} = -i\frac{\Phi_{\pm l}}{\Phi_{\pm l}} = A^{\pm}\,. \tag{6.31}$$

Las ecuaciones separadas quedan expresadas como

$$\Phi'_{\pm l} = iA^{\pm}\Phi_{\pm l}\,, \qquad \Theta'_{l,\pm l} = \pm A^{\pm}\cot\theta\,\Theta_{l,\pm l}\,. \tag{6.32}$$

De la primera ecuación, $\Phi_{\pm l} = B_{\pm l}e^{iA^{\pm}\varphi}$, pero como $\hat{L}_z Y_{l,\pm l} = \left(\pm l\right)\hbar Y_{l,\pm l}$, entonces

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\Phi_{\pm l}\Theta_{l,\pm l}\right] = -i\hbar\Theta_{l,\pm l}iA^{\pm}\Phi_{\pm l} = A^{\pm}\hbar Y_{l,\pm l}\,. \tag{6.33}$$

Por lo tanto, $A^{\pm} = \pm l$ y $\Phi_{\pm l}\left(\varphi\right) = B_{\pm l}e^{\pm il\varphi}$. Similarmente,

$$\begin{gathered}\Theta'_{l,\pm l} = \frac{d\Theta_{l,\pm l}}{d\theta} = l\cot\theta\,\Theta_{l,\pm l} = l\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\Theta_{l,\pm l}\\ \frac{d\Theta_{l,\pm l}}{\Theta_{l,\pm l}} = l\frac{\cos\theta}{\sin\theta}d\theta = l\frac{d\left(\sin\theta\right)}{\sin\theta}\end{gathered}\,, \tag{6.34}$$

por lo que $\Theta_{l,\pm l} = D_l\sin^l\theta$. Después de normalizar (Anexo 6.3),

$$\left|l,\pm l\right\rangle = Y_{l,\pm l}\left(\theta,\varphi\right) = \Phi_{\pm l}\left(\varphi\right)\Theta_{l,\pm l}\left(\theta\right),$$

$$\Phi_{\pm l}\left(\varphi\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\pm il\varphi}\,, \quad \Theta_{l,\pm l}\left(\theta\right) = \left(\mp 1\right)^l\sqrt{\frac{\left(2l+1\right)!}{2^{2l+1}l!^2}}\sin^l\theta\,. \tag{6.35}$$

Las funciones restantes se obtienen con el operador de descenso,

$$
\begin{aligned}
&\hat{L}_-\left|ll\right\rangle=\hbar\sqrt{1\cdot 2l}\left|l,l-1\right\rangle\\
&\hat{L}_-^2\left|ll\right\rangle=\hbar^2\sqrt{1\cdot 2\cdot 2l\cdot\left(2l-1\right)}\left|l,l-2\right\rangle\\
&\hat{L}_-^k\left|ll\right\rangle=\hbar^k\sqrt{k!2l\cdot\left(2l-1\right)\cdot\cdots\cdot\left(2l-k+1\right)}\left|l,l-k\right\rangle=\hbar^k\sqrt{k!\frac{2l!}{\left(2l-k\right)!}}\left|l,l-k\right\rangle
\end{aligned}
\quad , \qquad (6.36)
$$

y para $m=l-k$,

$$
\left|lm\right\rangle=\sqrt{\frac{\left(l+m\right)!}{\left(l-m\right)!2l!}}\left(\frac{\hat{L}_-}{\hbar}\right)^{l-m}\left|ll\right\rangle. \qquad (6.37)
$$

En coordenadas esféricas,

$$
\begin{aligned}
\frac{\hat{L}_-}{\hbar}&=e^{-i\varphi}\left\{-\frac{\partial}{\partial\theta}+i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right\}=e^{-i\varphi}\left\{-\frac{\partial\cos\theta}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\cos\theta}+i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right\}\\
&=e^{-i\varphi}\left\{\sin\theta\frac{\partial}{\partial\cos\theta}+i\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right\}=e^{-i\varphi}\left\{\sin\theta\frac{\partial}{\partial\cos\theta}-i\frac{\partial\sin\theta}{\partial\cos\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right\}
\end{aligned}
, \qquad (6.38)
$$

en donde $\frac{\partial\sin\theta}{\partial\cos\theta}=\frac{\partial\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\partial\cos\theta}=\frac{1}{2\sin\theta}\left(-2\cos\theta\right)=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$. Así, aplicando el operador de ascenso, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\frac{\hat{L}_-}{\hbar}\left|ll\right\rangle&=e^{-i\varphi}\left\{\Phi_l\sin\theta\frac{\partial\Theta_{ll}}{\partial\cos\theta}+l\Phi_l\Theta_{ll}\frac{\partial\sin\theta}{\partial\cos\theta}\right\}\\
&=\frac{e^{i(l-1)\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sin^l\theta\frac{\partial\Theta_{ll}}{\partial\cos\theta}+\Theta_{ll}\frac{\partial\sin^l\theta}{\partial\cos\theta}}{\sin^{l-1}\theta}=\frac{e^{i(l-1)\varphi}}{\sqrt{2\pi}\sin^{l-1}\theta}\frac{\partial\left(\sin^l\theta\Theta_{ll}\right)}{\partial\cos\theta}
\end{aligned}
, \qquad (6.39)
$$

y aplicándolo una vez más,

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\hat{L}_-}{\hbar}\right)^2\left|ll\right\rangle&=e^{-i\varphi}\frac{e^{i(l-1)\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\cos\theta}\left\{\frac{1}{\sin^{l-1}\theta}\frac{\partial\left(\sin^l\theta\Theta_{ll}\right)}{\partial\cos\theta}\right\}\\
&\quad+e^{-i\varphi}\frac{e^{i(l-1)\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\left(l-1\right)\frac{\partial\sin\theta}{\partial\cos\theta}\left(\frac{1}{\sin^{l-1}\theta}\frac{\partial\left(\sin^l\theta\Theta_{ll}\right)}{\partial\cos\theta}\right)
\end{aligned}
,
$$

$$\left(\frac{\hat{L}_-}{\hbar}\right)^2 \left|ll\right\rangle = \frac{e^{i(l-2)\varphi}}{\sqrt{2\pi}\sin^{l-2}\theta}\sin^{l-1}\theta\frac{\partial}{\partial\cos\theta}\left\{\frac{1}{\sin^{l-1}\theta}\frac{\partial\left(\sin^l\theta\Theta_{ll}\right)}{\partial\cos\theta}\right\}$$

$$+\frac{e^{i(l-2)\varphi}}{\sqrt{2\pi}\sin^{l-2}\theta}\frac{\partial\sin^{l-1}\theta}{\partial\cos\theta}\left\{\frac{1}{\sin^{l-1}\theta}\frac{\partial\left(\sin^l\theta\Theta_{ll}\right)}{\partial\cos\theta}\right\} \quad , \tag{6.40}$$

$$=\frac{e^{i(l-2)\varphi}}{\sqrt{2\pi}\sin^{l-2}\theta}\frac{\partial^2}{\partial\cos\theta^2}\left(\Theta_{ll}\sin^l\theta\right)$$

y en general

$$\left(\frac{\hat{L}_-}{\hbar}\right)^k \left|ll\right\rangle = \frac{e^{i(l-k)\varphi}}{\sqrt{2\pi}\sin^{l-k}\theta}\frac{\partial^k}{\partial\cos\theta^k}\left(\Theta_{ll}\sin^l\theta\right). \tag{6.41}$$

Por lo tanto, para $k=l-m$,

$$\left|lm\right\rangle \equiv \Phi_m(\varphi)\Theta_{lm}(\theta) = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!2l!}}\frac{(-1)^{(m+|m|)/2}}{\sin^m\theta}\frac{\partial^{l-m}\left(\sin^l\theta\Theta_{ll}\right)}{\partial\cos\theta^{l-m}}\frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$=\frac{(-1)^l}{2^l l!}\sqrt{\frac{(l+m)!(2l+1)!}{(l-m)!2l!2}}\frac{(-1)^{(m+|m|)/2}}{\sin^m\theta}\frac{d^{l-m}\left(\sin^{2l}\theta\right)}{d\cos\theta^{l-m}}\frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \quad , \tag{6.42}$$

$$=\frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}\frac{(-1)^l(-1)^{(m+|m|)/2}}{2^l l!\sin^m\theta}\sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\frac{2l+1}{2}}\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^{l-m}\left(1-\cos^2\theta\right)^l$$

en donde

$$\Phi_m(\varphi) = \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}},$$

$$\Theta_{l,m} = \frac{(-1)^{(m+|m|)/2}}{2^l l!}\sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}}\frac{1}{\sin^m\theta}\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^{l-m}\left(\cos^2\theta-1\right)^l. \tag{6.43}$$

En particular,

$$\Theta_{l0}(\theta) = \frac{1}{2^l l!}\sqrt{\frac{2l+1}{2}}\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^l\left(\cos^2\theta-1\right)^l = \sqrt{\frac{2l+1}{2}}P_l(\cos\theta), \tag{6.44}$$

en donde P_l es un polinomio de Legendre. En general, a las funciones propias del momento angular, con l entero, se les denomina armónicos esféricos, $Y_{lm}(\theta,\phi)=|lm\rangle$.

6.3. La reducción del problema de dos cuerpos

Para un sistema formado por dos partículas, en donde el potencial sólo depende del vector de separación entre las partículas,

$$\hat{H}=\hat{T}_1+\hat{T}_2+V(\vec{r}_2-\vec{r}_1), \tag{6.45}$$

es posible transformar al hamiltoniano en uno separable. Para la energía cinética,

$$T=T_1+T_2=\frac{1}{2}m_1\dot{r}_1^2+\frac{1}{2}m_1\dot{r}_2^2, \tag{6.46}$$

el cambio de variable a la coordenada del centro de masa y la coordenada relativa,

$$M\vec{R}=m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2, \qquad \vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1, \tag{6.47}$$

conduce a

$$\vec{r}_1=\vec{R}-\frac{m_2}{M}\vec{r}, \qquad \vec{r}_2=\vec{R}+\frac{m_1}{M}\vec{r},$$

$$\dot{r}_1^2=\dot{R}^2-\frac{2m_2}{M}\dot{\vec{R}}\cdot\dot{\vec{r}}+\left(\frac{m_2}{M}\right)^2\dot{r}^2, \qquad \dot{r}_2^2=\dot{R}^2+\frac{2m_1}{M}\dot{\vec{R}}\cdot\dot{\vec{r}}+\left(\frac{m_1}{M}\right)^2\dot{r}^2, \tag{6.48}$$

$$T=\frac{1}{2}\left(M\dot{R}^2+\mu\dot{r}^2\right),$$

en donde μ es la masa reducida,

$$\mu=\frac{m_1m_2}{M}=\frac{1}{\dfrac{1}{m_1}+\dfrac{1}{m_2}}. \tag{6.49}$$

Adicionalmente, los momentos conjugados provienen del lagrangiano, $\mathsf{L}=T-V$,

$$P=\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{R}}=M\dot{R}\,, \qquad p=\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{r}}=\mu\dot{r}\,,$$

$$T=\frac{P^2}{2M}+\frac{p^2}{2\mu}\,, \qquad H=T_{CM}+\frac{p^2}{2\mu}+V\left(\overline{r}\right). \tag{6.50}$$

Como el hamiltoniano es separable, $\Psi\left(\vec{R},\vec{r}\right)=\phi\left(\vec{R}\right)u\left(\vec{r}\right)$, y

$$\hat{H}\left|\Psi\right\rangle=u\cdot\hat{T}_{CM}\phi+\phi\cdot\left(\frac{\hat{p}^2}{2\mu}+V\left(\overline{r}\right)\right)u=E\phi u\,, \qquad \frac{\hat{T}_{CM}\phi}{\phi}=E-\frac{\hat{H}_r u}{u}\equiv E_{CM}\,, \tag{6.51}$$

entonces las funciones ϕ y u son solución de las ecuaciones de valores propios

$$\hat{H}_{CM}\phi=\hat{T}_{CM}\phi=E_{CM}\phi\,, \qquad \hat{H}_r u=E_r u\,. \tag{6.52}$$

Por lo tanto, el problema se reduce a un centro de masa, libre de fuerzas, y a un problema de un cuerpo en la coordenada relativa, en donde,

$$E_r=E-E_{CM} \qquad E=E_r+E_{CM}\,,$$

$$\phi=Ae^{i\vec{k}_{CM}\cdot\vec{R}}\,, \qquad E_{CM}=\frac{\hbar^2k_{CM}^2}{2M}\,. \tag{6.53}$$

6.4. El rotor rígido

Un rotor rígido es sistema que al rotar mantiene fijas las distancias internas. En particular, para dos partículas,

$$\left|\overline{r}_2-\overline{r}_1\right|=\text{constante.} \tag{6.54}$$

El momento de inercia también es separable,

$$I=\sum_i m_i r_i^2=m_1r_1^2+m_2r_2^2=MR^2+\mu r^2=I_{CM}+I_r\,. \tag{6.55}$$

En coordenadas esféricas, el hamitoniano relativo toma la forma

$$\hat{H}_r=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2=\frac{1}{2\mu r^2}\hat{L}^2\,, \tag{6.56}$$

en donde las funciones propias son funciones propias del momento angular, $u=\left|lm\right\rangle$. Así,

$$\hat{H}_r\left|lm\right\rangle = E_l\left|lm\right\rangle, \tag{6.57}$$

en donde

$$2\mu\, r^2 E_l = \hbar^2 l\left(l+1\right), \qquad E_l = \frac{\hbar^2}{2I_r} l\left(l+1\right). \tag{6.58}$$

Por lo tanto, en el espectro de un rotor rígido, se presenta absorción cuando

$$E_{l+1} - E_l = \frac{\hbar^2}{2I_r}\left(l+1\right)\left(l+2-l\right) = \frac{\hbar^2}{I_r}\left(l+1\right),$$

$$\Delta E = h\nu_l, \qquad \nu_l = \frac{\hbar}{2\pi I_r}\left(l+1\right), \qquad \Delta\nu = \frac{\hbar}{2\pi I_r}. \tag{6.59}$$

6.5. El movimiento en un campo magnético no homogéneo

Considere un campo magnético no uniforme de la forma

$$\vec{B} = \vec{k}\left(B_o + B_1 z\right). \tag{6.60}$$

La energía de interacción de un dipolo magnético con el campo está dada por

$$V = -\vec{\mu}_m \cdot \vec{B} = g\mu_B\left(B_o + B_1 z\right)L_z, \tag{6.61}$$

en donde se ha usado la relación de proporcionalidad entre el momento magnético y el momento angular, $\vec{\mu}_m = g\mu_B\vec{L}$. La fuerza que siente el dipolo se obtiene a partir de la energía potencial,

$$\vec{F} = -\nabla V = -\hat{k} g\mu_B B_1 L_z, \tag{6.62}$$

y usando un tratamiento semiclásico, tomando en cuenta los estados propios del momento angular, se tiene que cada una de las funciones propias siente una fuerzas distinta, que depende del valor propio m,

$$F_z = -\left(g\mu_B B_1 \hbar\right)m, \qquad -l \le m \le l. \tag{6.63}$$

Por lo tanto, para un valor particular de l, se deben detectar $2l+1$ señales. Dado que l toma valores enteros para el momento angular orbital, en este caso se debe observar un número impar de señales. Cuando $2l+1$ es par, l sólo puede corresponder a un valor semientero. Por esta razón, la observación de dos señales condujo al descubrimiento del espín del electrón.

6.6. Los potenciales centrales

Se denomina potencial central a aquel que sólo depende de la magnitud del vector de separación. Como $\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\hat{L}^2}{2\mu r^2}$, entonces,

$$\left[\hat{T},\hat{L}^2\right] = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right),\hat{L}^2\right] + \frac{1}{2\mu}\left[\frac{\hat{L}^2}{r^2} - \hat{L}^2\right] = 0, \tag{6.64}$$

$$\left[\hat{H},\hat{L}^2\right] = \left[\hat{T},\hat{L}^2\right] + \left[\hat{V},\hat{L}^2\right] = \left[V(\mathbf{r}),\hat{L}^2\right].$$

Como $V(\mathbf{r}) = V(r)$, entonces $\left[\hat{H},\hat{L}^2\right] = 0$ y $\left[\hat{H},\hat{L}_z\right] = 0$, por lo tanto $\hat{H}$, $\hat{L}^2$ y $\hat{L}_z$ tienen funciones propias comunes. Así, la ecuación de valores propios de la energía,

$$\hat{H}u_E = Eu_E, \tag{6.65}$$

toma la forma

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u_E}{\partial r}\right) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}u_E + V(r)u_E = Eu_E. \tag{6.66}$$

Por lo tanto, la ecuación diferencial es separable en una parte radial y una angular. Además, la solución toma la forma $u_E(\mathbf{r}) = R(r)Y_{lm}(\theta,\phi)$.

Al sustituir la función separada en la ecuación anterior, se obtiene una ecuación diferencial para la parte radial, $R(r)$, que es independiente de m,

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_{nl}}{dr}\right) + \left[\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{l(l+1)}{r^2} + V(r)\right]R_{nl} = E_{nl}R_{nl}, \tag{6.67}$$

por lo tanto, $u_E(\mathbf{r}) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\varphi) = |nlm\rangle$. Observe que la energía E_{nl} es independiente de m, por lo tanto, para el valor propio E_{nl} hay $2l+1$ estados degenerados.

6.7. Problemas

1. Encuentre las expresiones en coordenadas esféricas de los operadores:

$$\hat{L}_1, \hat{L}_2, \hat{L}_3, \hat{L}_+, \hat{L}_-, \hat{L}^2.$$

2. Calcule los brakets $\langle lm|\hat{L}_1^2|lm\rangle$, $\langle lm|\hat{L}_2^2|lm\rangle$ y $\langle lm|\hat{L}_3^2|lm\rangle$.

3. Obtenga todos los armónicos esféricos, Y_{lm}, con $l<3$.