7. Sistemas oscilantes

En esta sección trataremos sistemas que están sometidos a fuerzas que tratan de mantener al sistema en su posición inicial, con lo cual se presentan oscilaciones. Empezaremos con un sistema que no presenta fuerzas disipativas y luego tomaremos en cuenta este tipo de fuerzas.

7.1. Oscilador armónico

Tomemos como ejemplo una partícula, de masa m, que se encuentra sujeta a un resorte. Si el desplazamiento, x, que experimenta la partícula es pequeño entonces una buena aproximación a la fuerza que impone el resorte es

$$F_{resorte} = -kx, \tag{1}$$

en donde la k dependerá de la naturaleza del resorte. Por supuesto que a mayor k, mayor será la fuerza a la que esté sometida la partícula.

La ecuación de Newton que debemos resolver es

$$-kx(t) = m\frac{d^2x(t)}{dt^2}, \tag{2}$$

o también

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + kx = 0, \tag{3}$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \tag{4}$$

Otra forma de escribir esta ecuación es

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \tag{5}$$

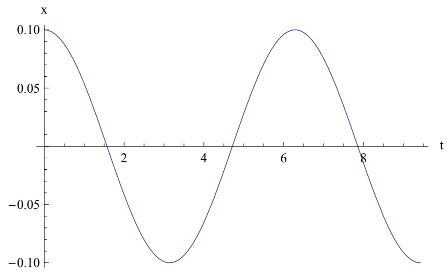
con $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

Recordemos que en Mathematica podemos resolver esta ecuación diferencial con el comando DSolve. Al usar las condiciones iniciales $x(t) = x_0$, $v(0) = v_0$, con Mathematica encontramos que

$$x(t) = x_0 cos(w_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} sen(w_0 t). \tag{6}$$

La velocidad se puede encontrar de esta ecuación ya que $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

$$v(t) = -x_0\omega_0 sen(w_0 t) + v_0 cos(w_0 t). \tag{7}$$



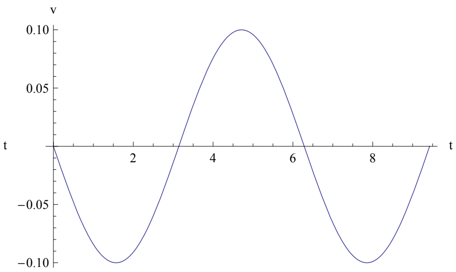


Figura 1: Posición y velocidad como funciones del tiempo en el oscilador armónico

En este momento estamos en posición de hacer las gráficas de $x(t)$ vs. t y $v(t)$ vs. t. Para esto debemos de asignar valores a x_0, v_0, m y k. Vamos a suponer que $x_0 = 0{,}1$ m, $v_0 = 0$ m/s y $k/m = 1\ s^{-2}$. Con estos datos se obtienen las gráficas que están en la Figura 1.

Por supuesto que el comportamiento en las dos cantidades es periódico. Nos podemos dar cuenta que cuando la posición es cero la rapidez (la magnitud de la velocidad) toma su valor máximo. O que cuando la rapidez adquiere su valor más puequeño la posición toma su valor máximo. Una gráfica de este tipo describe a lo que se conoce como el espacio fase. Para realizar un análisis de este tipo es necesario trabajar con gráficas paramétricas.

La gráfica paramétrica de las ecuaciones $x(\theta) = 3cos\theta$, $y(\theta) = 3sen\theta$ la presentamos en la Figura 2.

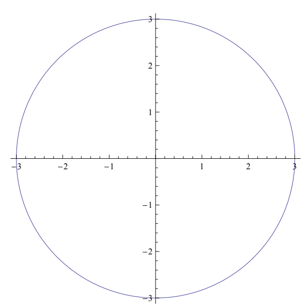


Figura 2: Gráfica paramétrica de las ecuaciones $x(\theta) = 3cos\theta$, $y(\theta) = 3sen\theta$.

Otro ejemplo de una gráfica paramétrica se muestra en la Figura 3, donde se tienen las ecuaciones $x(\theta) = 3cos^3\theta$, $y(\theta) = 3sen^3\theta$

De la misma manera en que se construyeron las gráficas anteriores se puede construir la gráfica $v(t)$ vs. $x(t)$. En la Figura 4 se presenta el espacio fase en el oscilador armónico

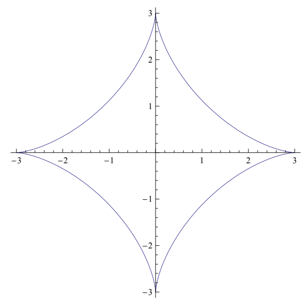


Figura 3: Gráfica paramétrica de las ecuaciones $x(\theta) = 3cos^3\theta$, $y(\theta) = 3sen^3\theta$.

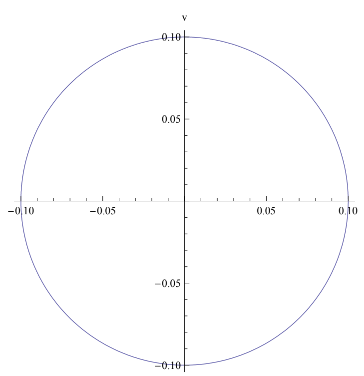


Figura 4: Gráfica de $v(t)$ vs. $x(t)$ para el oscilador armónico.

De esta figura es más claro que cuando $x = 0$, $|v|$ toma su valor máximo y que cuando $v = 0$ entonces $|x|$ es máximo.

7.2. Análisis de la energía en el oscilador armónico

Partiendo de la ecuación de Newton, vamos a multiplicarla por $x'(t)$ e integremos sobre el tiempo

$$m \int dt \frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + k \int dt \frac{dx}{dt} x = 0. \tag{8}$$

Estas integrales se pueden evaluar usando la técnica de integración por partes. La manera en que usemos esta técnica será ligeramente diferente a como se usa comunmente. Trabajemos con el segundo término de la ecuación 8, y reconozcamos la siguiente igualdad

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(x^2) = x\frac{dx}{dt}, \tag{9}$$

$$\frac{1}{2}dt\frac{d}{dt}(x^2) = dtx\frac{dx}{dt}, \tag{10}$$

o también

$$dtx\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}d(x^2). \tag{11}$$

Al multiplicar esta ecuación por k e integrando sobre el tiempo obtenemos que

$$k \int dtx\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}k \int d(x^2) = \frac{1}{2}kx^2, \tag{12}$$

a este resultado hay que sumarle una constante de integración.

Vamos a proceder de la misma manera con el primer término de la ecuación 8

$$\frac{d}{dt}(\frac{dx}{dt}\frac{dx}{dt}) = \frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt} + \frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}, \tag{13}$$

con esto se obtiene que

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\frac{dx}{dt}\frac{dx}{dt}), \tag{14}$$

multiplicando por dt e integrando se tiene

$$\int dt\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{2}\int dt\frac{d}{dt}(\frac{dx}{dt}\frac{dx}{dt}) = \frac{1}{2}\frac{dx}{dt}\frac{dx}{dt}. \tag{15}$$

Con este resultado obtenemos que

$$m\int dt\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{m}{2}(\frac{dx}{dt})^2. \tag{16}$$

Entonces, nuestro resultado final queda como

$$\frac{m}{2}(\frac{dx}{dt})^2+\frac{1}{2}kx^2=E, \tag{17}$$

donde la constante E nos representa las dos constantes de integración. Uno de los dos términos lo podemos reconocer rápidamente con la energía cinética

$$E_{cin}=\frac{m}{2}(\frac{dx}{dt})^2, \tag{18}$$

y el segundo término nos representará a la energía potencial

$$E_{pot}=\frac{1}{2}kx^2. \tag{19}$$

Por supuesto que con esta información podemos obtener las gráficas pertinentes para hacer un análisis de las componentes de la energía como funciones del tiempo.