Apoyo para el examen de admisión al Posgrado en Química de la UAMI Matemáticas*

Jorge Garza
jgo@xanum.uam.mx

Versión 1.0

Índice

Estas notas son una pequeña ayuda para preparar el examen de ingreso del posgrado en química de la UAM-Iztapalapa. Los temas que se tratan se puede encontrar en el libro *The Chemistry Maths Book* escrito por Erich Steiner, publicado por Oxford University Press. La segunda edición de este libro fue publicado en el año 2008. Además, este libro tiene un soporte importante ya que todos los ejercicios que propone el autor, al final de cada capítulo, se encuentran resueltos con todo detalle y están publicados en formato pdf en la dirección electrónica www.oxfordtextbooks.co.uk/orc/steiner2e.

1. Matrices, determinantes y vectores

1.1. Matrices

Para un conjunto de ecuaciones simultáneas, por ejemplo

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + .. + a_{1N}x_N &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + .. + a_{2N}x_N &= b_2 \\
&. \\
&. \\
a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + .. + a_{NN}x_N &= b_N
\end{aligned}$$

es conveniente escribirlo como

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2N} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{N1} & a_{N2} & .. & a_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_N \end{pmatrix}$$

A partir de estas cantidades es claro que tenemos tres arreglos, el de los coefiecientes a's que consta de N renglones y N columnas, el de las incógnitas x's y las contantes b's que constan de N renglones y una columna.

En el caso más general se tienen arreglos de $N \times M$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1M} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2M} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{N1} & a_{N2} & .. & a_{NM} \end{pmatrix}$$

La suma y la resta entre matrices se realizan operando elemento a elemento, esto significa que para sumar o restar dos matrices es necesario que tengan la misma dimensión.

Ejemplo

Si

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1/2 & 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 10 & 0 \\ 1/2 & 6 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 2 \\ 1 & 10 & -7 \end{pmatrix}$$

La multiplicación entre dos matrices es diferente a la suma o a la resta y tiene varios puntos que deben ser considerados. Por ejemplo, esta operación no es conmutativa. Si tenemos dos matrices, $\boldsymbol{A}$ de $M \times N$ y $\boldsymbol{B}$ de $K \times L$, significa que en general

$$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}. \tag{1}$$

Además, para que se pueda realizar el producto AB es necesario que el número de columnas de $\boldsymbol{A}$ sea igual al número de renglones de $\boldsymbol{B}$ ($N = K$). Al cumplir este requisito, si

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}. \tag{2}$$

entonces

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{N} a_{il} b_{lj}. \tag{3}$$

La dimensión de la matriz resultante será de $M \times L$.

Ejemplo

Si

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

encuentre

a) $\boldsymbol{AB}$

Resultado:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 13 & -7 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

b) $\boldsymbol{BA}$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Resultado:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 10 & -12 & 8 \\ 0 & 13 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{C}$ representan matrices entonces a continuación se enlistan algunas propiedades que cumplen y algunas matrices importantes:

1. Si α es un escalar y $\boldsymbol{C} = \alpha\boldsymbol{A}$ entonces $c_{ij} = \alpha a_{ij}$.
2. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$
3. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$
4. La matriz identidad, $\boldsymbol{I}$, es aquella matriz que todos sus elementos diagonales son iguales a 1 y los que se encuentran fuera de la diagonal son iguales a cero.
5. Si $\boldsymbol{A}^{-1}$ representa la matriz inversa de la matriz $\boldsymbol{A}$ entonces $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$.
6. Si $\boldsymbol{A}^{T}$ representa la matriz transpuesta de la matriz $\boldsymbol{A}$ entonces $(\boldsymbol{A}^{T})_{ij} = a_{ji}$.
   Ejemplo
   Si
   $$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \\ -9 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$
   entonces
   $$\boldsymbol{A}^{T} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -9 \\ -1 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$
7. $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{T} = \boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{A}^{T}$.
8. $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

Ejemplo
Crompruebe que la matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{7}{33} & \frac{3}{11} & \frac{2}{33} \\ \frac{29}{33} & \frac{3}{11} & \frac{13}{33} \\ \frac{28}{33} & \frac{1}{11} & \frac{8}{33} \end{pmatrix}$$

es la matriz inversa de

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ -5 & 7 & -6 \end{pmatrix}$$

Si $\boldsymbol{A}$ es la inversa de $\boldsymbol{B}$ entonces $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}$. Evaluemos algunos elementos de la matriz $\boldsymbol{C}$, primero un elemento que pertenezca a la diagonal,

$$c_{11} = \sum_{l=1}^{3} a_{1l} b_{l1} = \left(\frac{7}{33}\right)(1) + \left(\frac{3}{11}\right)(4) + \left(\frac{2}{33}\right)(-5),$$

$$c_{11} = \frac{7}{33} + \frac{36}{33} + \frac{-10}{33} = \frac{33}{33} = 1,$$

ahora un elemento que se encuentre fuera de la diagonal

$$c_{32} = \sum_{l=1}^{3} a_{3l} b_{l2} = \left(\frac{28}{33}\right)(-2) + \left(\frac{1}{11}\right)(0) + \left(\frac{8}{33}\right)(7),$$

$$c_{32} = \frac{-56}{33} + 0 + \frac{56}{33} = 0.$$

Evaluando de la misma manera los restantes elementos de la matriz $\boldsymbol{C}$ se obtiene que es igual a la matriz identidad.

1.2. Determinantes

Un determinante está relacionado con una matriz pero tiene un significado totalmente diferente ya que se construye a partir de un arreglo y regresa como resultado una cantidad escalar.Así, el determinante del arreglo, $\boldsymbol{A}$ (debe ser un arreglo cuadrado), se representa como

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2N} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{N1} & a_{N2} & .. & a_{NN} \end{vmatrix}.$$

Una manera de evaluar a un determinante es a partir del método de los menores donde el determinante es dividido en determinantes de orden menor.

Ejemplo

Evaluar

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ -1 & \frac{1}{4} & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$|\boldsymbol{A}| = 3\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ \frac{1}{4} & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} - \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & \frac{1}{4} & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

Para el determinante del primer término de esta expresión se tiene

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ \frac{1}{4} & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} &= 0\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} \frac{1}{4} & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (0)\Big((2)(4) - (0)(2)\Big) - 4\Big((\frac{1}{4})(4) - (0)(-3)\Big) \\ &\quad -1\Big((\frac{1}{4})(2) - (2)(-3)\Big) \\ &= 0 - 4(1-0) - \left(\frac{1}{2} + 6\right) = -\frac{21}{2} \end{aligned}$$

De manera similar se obtiene

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} &= 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 36, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} &= 2\begin{vmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} - (0)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{4} \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{3}{4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & \frac{1}{4} & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} &= 2\begin{vmatrix} \frac{1}{4} & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - (0)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{4} \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \\ &= 24, \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 4 & -1 \\ -1 & \frac{1}{4} & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -81.$$

Es importante observar, en todos los casos, el cambio de signo en la alternación de los cofactores que multiplica a los determinantes de ordenes menores.

Algunas propiedades de los determinantes:

1. La transposición no afecta el valor de un determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

2. Si un renglón o una columna de un determinante están multiplicados por una constante λ entonces esta constante puede ser factorizada

$$\begin{vmatrix} \lambda a_1 & b_1 & c_1 \\ \lambda a_2 & b_2 & c_2 \\ \lambda a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

3. Regla de suma

$$\begin{vmatrix} a_1 + d_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + d_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

4. Antisimetría ante el intercambio de dos renglones o dos columnas

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix}.$$

5. Si dos renglones son iguales entre sí o dos columnas son iguales entre sí, en un determinante, entonces el determinante será igual a cero.

1.3. Vectores

Un vector se puede considerar como un caso particular de una matriz que consta de una columna y N renglones. En coordenadas cartesianas un vector puede escribise de varias maneras, por ejemplo

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = (A_x, A_y, A_z) = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}, \tag{4}$$

donde $\boldsymbol{i} = (1, 0, 0)$, $\boldsymbol{j} = (0, 1, 0)$ y $\boldsymbol{k} = (0, 0, 1)$.

La suma y resta entre vectores se realizan como en el caso de las matrices (elemento a elemento) y existen dos productos importantes.

1. Producto escalar

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z. \tag{5}$$

2. Producto vectorial

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{6}$$

La norma (o longitud), $|\vec{V}|$, de un vector se define a través del producto escalar

$$|\vec{V}| = \sqrt{\vec{V} \bullet \vec{V}} = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}. \tag{7}$$

Ejemplo

Si $\vec{A} = -2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ y $\vec{B} = 4\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$ encuentre:

1. La diferencia $\vec{A} - \vec{B}$

   $\vec{A} - \vec{B} = (-2 - 4)\boldsymbol{i} + (3 - (-1))\boldsymbol{j} + (1 - 5)\boldsymbol{k}$,
   $\vec{A} - \vec{B} = -6\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$.

2. La norma de cada vector.

   $|\vec{A}| = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2 + (1)^2} = \sqrt{14}$,
   $|\vec{B}| = \sqrt{(4)^2 + (-1)^2 + (5)^2} = \sqrt{42}$.

3. El producto escalar entre ellos.

   $\vec{A} \bullet \vec{B} = (-2)(4) + (3)(-1) + (1)(5) = -8 - 3 + 5 = -6$.

4. El producto vectorial entre ellos.

$$\begin{aligned}
\vec{A}\times\vec{B} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} \\
&= \boldsymbol{i}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - \boldsymbol{j}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + \boldsymbol{k}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \\
&= 16\boldsymbol{i} + 14\boldsymbol{j} - 10\boldsymbol{k}.
\end{aligned}$$

Es importante mencionar los resultados obtenidos cuando se multiplican entre sí los vectores $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{k}$. Si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ representan a algunos de estos vectores entonces

$$\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b} = 1 \text{ cuando } \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}, \tag{8}$$

$$\boldsymbol{a}\bullet\boldsymbol{b} = 0 \text{ cuando } \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{a}. \tag{9}$$

2. Funciones de una variable

Una función es una relación entre dos variables, x y f, donde a cada valor de la variable independiente x, se le asocia un valor de la variable dependiente f. En esta definición no se permite que para un valor de x se le asocien varios valores de f. El dominio que presente la variable x dependerá de la regla de asignación que presente la función f.

Ejemplo

Clasifique si los siguientes incisos representan una función :

1. $f(x) = 3x^2$
   Sí es una función. En este caso para dos valores de x, por ejemplo $x = -1$ y $x = 1$ se tiene un solo valor de f, $f(-1) = f(1) = 3$.

2. $f(x) = \pm\sqrt{x^2 - 7}$
   No es una función por que para un mismo valor de x se tienen dos valores de la función, por ejemplo, si $x = 4$ entonces $f(4) = +3$ y $f(4) = -3$. Como para un mismo valor de x se tienen dos valores de f entonces f no cabe dentro de la definición de función.

2.1. Raíces de una función

En muchos problemas de las ciencias básicas la función de interés debe cumplir con la ecuación

$$f(x) = 0. \tag{10}$$

Los valores de x que satisfacen tal relación son conocidas como raíces de $f(x)$ o los ceros de $f(x)$.

Ejemplo

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$, con a, b y c como constantes, entonces encuentre las raíces de esta función.
Las raíces deben de satisfacer

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0. \tag{11}$$

Para este fin, primero se completará el cuadrado perfecto involucrado en esta expresión

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) = -c, \tag{12}$$

donde se ha supuesto que $a \neq 0$. La última expresión se puede escribir como

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a}. \tag{13}$$

Luego se despeja la x,

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2, \tag{14}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{-4ac+b^2}{(2a)^2}, \tag{15}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{-4ac+b^2}{(2a)^2}}, \tag{16}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{-4ac+b^2}{(2a)^2}}=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{-4ac+b^2}}{2a}, \tag{17}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{-4ac+b^2}}{2a}. \tag{18}$$

Por la forma final que se ha encontrado, es claro que aún cuando las constantes a, b y c sean números reales puede ser que las dos raíces no lo sean, ya que si $-4ac+b^2<0$ entonces las raíces serán complejas. Para este caso se recomienda la sección de números complejos de estas notas.

2.2. Funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas están entre las funciones más importantes que debemos recordar, sobre todo su comportamiento. A continuación se enlistan las identidades más importantes entre estas funciones:

$$sen^2(\alpha)+cos^2(\alpha)=1, \tag{19}$$

$$sen(\alpha+\beta)=sen(\alpha)cos(\beta)+cos(\alpha)sen(\beta), \tag{20}$$

$$sen(\alpha-\beta)=sen(\alpha)cos(\beta)-cos(\alpha)sen(\beta), \tag{21}$$

$$cos(\alpha+\beta)=cos(\alpha)cos(\beta)-sen(\alpha)sen(\beta), \tag{22}$$

$$cos(\alpha-\beta)=cos(\alpha)cos(\beta)-sen(\alpha)sen(\beta). \tag{23}$$

A partir de estas relaciones se pueden derivar muchas identidades trigonométricas.

Ejemplo

Muestre que $cos(2\alpha)=2cos^2(\alpha)-1$.

A partir de la ecuación 22 encontramos que

$$cos(2\alpha)=cos^2(\alpha)-sen^2(\alpha), \tag{24}$$

y despejando $sen^2(\alpha)$ de la ecuación 19 se obtiene

$$cos(2\alpha)=cos^2(\alpha)-(1-cos^2(\alpha)), \tag{25}$$

para obtener así el resultado deseado.

2.3. La función logaritmo natural

La función logaritmo natural, $\ln(x)$, tiene como dominio $x > 0$ y es creciente. Para $x < 1$ toma valores negativos y para $x > 1$ toma valores positivos. Para $x = 1$ es igual a cero. Además, exhibe las siguientes propiedades

$$\ln(pq) = \ln(p) + \ln(q), \tag{26}$$

$$\ln(\frac{p}{q}) = \ln(p) - \ln(q), \tag{27}$$

$$\ln(p^m) = m\ln(p), \tag{28}$$

con $p > 0$ y $q > 0$.

2.4. La función exponencial

La función exponencial, $\exp(x)$, es la función inversa a la función logaritmo natural. Por lo tanto,

$$\exp(\ln(x)) = x, \tag{29}$$

o también

$$\ln(\exp(x)) = x. \tag{30}$$

A diferencia de la función logaritmo natural, el dominio de la función exponencial es $-\infty < x < \infty$ y presenta valores positivos. Es una función creciente cuya velocidad de crecimiento supera cualquier potencia de x cuando $x >> 1$. Es importante recordar el comportamiento de las funciones $\exp(x)$ y $\exp(-x)$.

2.5. Límites

El concepto de límite es muy importante para el análisis de una función, en particular para saber sobre la continuidad de la función en un determinado dominio. Por ejemplo, la función $f(x)$ es continua alrededor de x_0 si $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$ y $f(x_0 - \Delta x) = f(x_0)$ cuando $\Delta x \to 0$. Es claro que se debe de analizar a $f(x)$ alrededor de x_0, precisamente para este caso el concepto de límite es importante por que es necesario saber cómo se comporta la función en el límite en que Δx es cero.

Ejemplo

Encuentre

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2+x}{3+x}. \tag{31}$$

En este caso, en el límite indicado $x >> 2$ y $x >> 3$ con lo que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2+x}{3+x} = 1. \tag{32}$$

Ejemplo
Encuentre

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+3}}. \tag{33}$$

En este ejemplo es importante la factorización de x^3 dentro de la raíz,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3(1+\frac{3}{x^3})}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x\sqrt[3]{1+\frac{3}{x^3}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{3}{x^3}}}. \tag{34}$$

Al tomar el límte $x \to \infty$ encontramos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+3}} = 1. \tag{35}$$

2.6. La derivada

La derivada, d/dx, de la función $f(x)$ se define como

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{36}$$

Ejemplo
Encuentre la derivada de la función x^2.
A partir de la definición de la derivada se requiere $\Delta f/\Delta x$, por lo tanto

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}, \tag{37}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x, \tag{38}$$

en el límite $\Delta x \to 0$ se tiene

$$\frac{df}{dx} = 2x. \tag{39}$$

Naturalmente, existen reglas y tablas para encontrar la derivada de una o varias funciones. En el Cuadro 1 se presentan algunas reglas de derivación y derivadas de funciones conocidas.

En este cuadro también se hace referencia a la regla de la cadena, la cual se ejemplifica a continuación.

Función	Derivada
c	0
cf	$c\frac{df}{dx}$
fg	$g\frac{df}{dx} + f\frac{dg}{dx}$
f^n	$nf^{n-1}\frac{df}{dx}$
$sen(x)$	$cos(x)$
$cos(x)$	$-sen(x)$
$\exp(x)$	$\exp(x)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x\ln(a)}$

Cuadro 1: Reglas de derivación y algunas derivadas de funciones conocidas.

2.7. Regla de la cadena

Ejemplo

Obtenga la derivada de $f(x) = (x^2 + 3x)^3$. Para obtener esta derivada es conveniente definir $u(x) = x^2 + 3x$, con lo que

$$\frac{df}{dx} = \frac{du^3(x)}{dx} = 3u^2(x)\frac{du(x)}{dx}, \tag{40}$$

como

$$\frac{du(x)}{dx} = 2x + 3, \tag{41}$$

el resultado final se obtiene de

$$\frac{df}{dx} = 3\left(x^2 + 3x\right)^2(2x + 3), \tag{42}$$

2.8. Derivadas implícitas

En muchas ocasiones se pide encontrar la derivada de una función que depende en x, sin tener una expresión explícita de esa función en términos de esta variable. En estos casos hay que recurrir a la derivación implícita.

Ejemplo

Obtener $\frac{dy}{dx}$ a partir de la ecuación

$$x^2y + y^4 - 6x = 8y^2 + 6. \tag{43}$$

Es claro que no podemos despejar a la variable y para tenerla en términos de x exclusivamente. Por lo tanto, vamos a derivar ambos lados de la ecuación para tener

$$2xy + x^2\frac{dy}{dx} + 4y^3\frac{dy}{dx} - 6 = 16y\frac{dy}{dx}, \tag{44}$$

como nos piden a $\frac{dy}{dx}$, agrupamos a los términos que contienen esta cantidad y factorizamos

$$\frac{dy}{dx}(x^2 + 4y^3 - 16y) = -2xy + 6. \tag{45}$$

Finalmente despejamos a $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(-2xy + 6)}{(x^2 + 4y^3 - 16y)}. \tag{46}$$

Ejemplo

Encontrar $\frac{dy}{dx}$ a partir de la siguiente expresión

$$y^2 + \ln\left(\frac{x}{y}\right) - 4x + 3 = 0. \tag{47}$$

Al derivar implícitamente se obtiene que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(4 - \frac{1}{x})}{(2y - \frac{1}{y})}. \tag{48}$$

2.9. Diferenciación sucesiva

Si la primer derivada de una función es continua entonces es posible obtener la segunda derivada

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right), \tag{49}$$

y así sucesivamente,

$$\frac{d^nf}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\right). \tag{50}$$

2.10. Máximos y mínimos

Los máximos y mínimos en una función se encuentran cuando se satisface la relación

$$\frac{df(x)}{dx} = 0. \tag{51}$$

Para un máximo, además de esta condición se debe de cumplir con

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} < 0, \tag{52}$$

y para un mínimo

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} > 0. \tag{53}$$

Se obtiene un punto de inflexión cuando

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = 0. \tag{54}$$

Ejemplo

Encuentre los máximos y mínimos de la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6$.

Para ubicar las posiciones de los máximos o mínimos se debe de satisfacer

$$\frac{df}{dx} = 6x^2 - 6x = 0, \tag{55}$$

o también

$$x(x-1) = 0, \tag{56}$$

lo cual nos lleva a que los mx́imos o mínimos se encuentran en $x = 0$ y $x = 1$.

Para caracterizar estos puntos es necesario recurrir a la segunda derivada

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = 12x - 6, \tag{57}$$

y evaluarla en $x = 0$ y $x = 1$. Para el primer caso se tiene que

$$\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=0} = -6, \tag{58}$$

teniendo para este caso un máximo. Para el segundo caso ($x = 1$)

$$\left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=1} = 6, \tag{59}$$

teniendo aquí un mínimo.

2.11. Series de Taylor

En muchas ocasiones es necesario tener una representación polinomial de una función para saber su comportamiento alrededor de un punto. Para este fin la expansión en series de Taylor, de la función $f(x)$ alrededor del punto x_0, es útil y se obtiene de

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{d^{(n)} f(x)}{dx^n} \right)_{x=x_0} (x - x_0)^n. \tag{60}$$

Por ejemplo, si $x \cong x_0$ entonces una muy buena representación de $f(x)$ podría ser una línea recta

$$f(x) \cong f(x_0) + \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} (x - x_0), \tag{61}$$

la cual se le conoce como aproximación a primer orden. La aproximación a segundo orden tiene la forma

$$f(x) \cong f(x_0) + \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \left.\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right|_{x=x_0} (x - x_0)^2. \tag{62}$$

De esta manera podemos representar a una función en un polinomio del orden que nosotros creamos que es conveniente.

Ejemplo

Encuentre las series de Taylor, hasta sexto orden y alrededor de $x_0 = 0$, correspondientes a las funciones exponencial, seno y coseno.

A continuación mostramos las derivadas, hasta el orden 6, evaluadas en $x_0 = 0$ de cada una de las tres funciones

Función	0	1	2	3	4	5	6
exp	1	1	1	1	1	1	1
sin	0	1	0	-1	0	1	0
cos	1	0	-1	0	1	0	-1

Cuadro 2: Derivadas evaluadas en $x_0 = 0$ de las funciones exponencial, seno y coseno.

Con esta información las series de Taylor tendrán la forma

$$\exp(x) \approx 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 \tag{63}$$

$$\sin(x) \approx x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 \tag{64}$$

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 \tag{65}$$

Ejemplo
Encuentre

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} \tag{66}$$

haciendo uso de las series de Taylor. En este caso haremos una aproximación a cuarto orden, por lo cual son necesarias cuatro derivadas evaluadas en $x_0 = 0$. Al evaluar estas derivadas encontramos que alrededor de $x_0 = 0$ la función seno tiene la siguiente forma

$$sen(x) \cong x - \frac{1}{6}x^3, \tag{67}$$

y por lo tanto

$$\frac{sen(x)}{x} \cong 1 - \frac{1}{6}x^2. \tag{68}$$

De aquí que

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1. \tag{69}$$

2.12. La diferencial

Esta cantidad está estrechamente relacionada con cambios infinitesimales de una función debido a los cambios infinitesimales exhibidos por la variable de la cual depende, así la diferencial de $f = f(x)$ se expresa como

$$df = \frac{df}{dx}dx. \tag{70}$$

2.13. La integral indefinida

La integral, $\int$, representa una operación inversa a la derivada, por lo tanto

$$\int df = \int \frac{df}{dx}dx = f + k, \tag{71}$$

donde k representa una constante, la cual es conocida como constante de integración. Es claro que si se deriva al resultado anterior entonces se obtendrá df/dx ya que la derivada de k es igual a cero. Al igual que en la derivada se conocen integrales de funciones conocidas. En el Cuadro 2 se enlistas algunas integrales.

Ejemplo

Función	Integral
c	$cx + k$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + k$ para $n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + k$
$sen(x)$	$-cos(x) + k$
$cos(x)$	$sen(x) + k$
$\exp(x)$	$\exp(x) + k$
a^x	$\frac{a^x}{\ln(a)} + k$

Cuadro 3: Integrales de funciones conocidas.

Evaluar

$$\int cos(3x)dx. \tag{72}$$

Para este ejemplo es conveniente hacer uso del cambio de variable

$$u = 3x, \tag{73}$$

con lo que

$$du = 3dx, dx = \frac{1}{3}du. \tag{74}$$

Sustituyendo 73 y 74 en 72 se obtiene

$$\int cos(3x)dx = \frac{1}{3}\int cos(u)du = \frac{1}{3}sen(u) + k, \tag{75}$$

para obtener el resultado final

$$\int cos(3x)dx = \frac{1}{3}sen(3x) + k. \tag{76}$$

Ejemplo
Evaluar

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-2}}. \tag{77}$$

Definiendo

$$u = 4x - 2, \tag{78}$$

con lo que

$$du = 4dx, \frac{du}{4} = dx. \tag{79}$$

Con estas expresiones la integral original se transforma en

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-2}} = \frac{1}{4}\int u^{-\frac{1}{2}}du. \tag{80}$$

Finalmente se obtiene

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-2}} = \frac{1}{4}\int u^{-\frac{1}{2}}du = \frac{1}{4}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + k = \frac{1}{2}\sqrt{4x-2} + k. \tag{81}$$

2.14. La integral definida

La integral definida de $f(x)$ representa el área, A, bajo la curva que describe la función en el intervalo $a \leq x \leq b$. Así, la integral se escribe con estos límites de integración

$$A = \int_a^b f(x)dx. \tag{82}$$

Ejemplo
Evaluar

$$\int_1^t \frac{1}{x}dx, \tag{83}$$

en este caso recurrimos directamente al Cuadro 2 para obtener

$$\int_1^t \frac{1}{x}dx = \ln(x)]_1^t = \ln(t) - \ln(1) = \ln(t). \tag{84}$$

Como se puede ver esta expresión nos permite definir a la función logaritmo natural, como el área bajo la curva descrita por la función $1/x$.

3. Funciones de dos y tres variables

3.1. Derivadas parciales

En el caso que la función con que se esté tratando dependa en más de una variable la derivada se define de una forma similar al caso unidimensional, aunque es necesario considerar los cambios con respecto a una variable manteniedo las demás fijas. Por ejemplo, si $f = f(x, y, z)$ entonces

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}, \tag{85}$$

es claro de esta definición que las variables y y z se mantienen fijas durante el proceso de obtener el lḿite. Para las derivadas con respeto a y y z se tendrá

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}, \tag{86}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}. \tag{87}$$

Ejemplo

Si $f(x, y) = x^2 - y^2$ encuentre $(\frac{\partial f}{\partial x})_y$ y $(\frac{\partial f}{\partial y})_x$. Para la primer derivada parcial se tendrá

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - y^2 - (x^2 - y^2)}{\Delta x}, \tag{88}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - y^2 - x^2 + y^2)}{\Delta x}, \tag{89}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x), \tag{90}$$

obteniendo que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y} = 2x. \tag{91}$$

Para el caso de la segunda derivada que se está solicitando se sigue un procedimiento análogo y se obtiene que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x} = -2y. \tag{92}$$

Naturalmente, todas las reglas y derivadas conocidas para funciones que dependen de una variable son aplicables para el caso de varias variables teniendo cuidado en mantener constantes todas la variables que no están involucradas en el proceso de derivación. En particular, es de sumo cuidado este punto cuando se obtienen derivadas de orden superior.

Ejemplo

Encuentre las derivadas de segundo orden de la función

$$f(x,y) = 4x^3 - 6xy^2 + yx^2 + 2y^3. \tag{93}$$

Para una función de dos variables se tiene la posibilidad de encontrar 4 derivadas de segundo orden,

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y\right)_y, \tag{94}$$

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y\right)_x, \tag{95}$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x\right)_y, \tag{96}$$

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x\right)_x. \tag{97}$$

En estas últimas expresiones se ha hecho énfasis en el proceso de mantener constante una variable al momento de derivar con respecto a otra. Para las derivadas de orden 1 se tiene

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y = 12x^2 - 6y^2 + 2xy, \tag{98}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x = -12xy + x^2 + 6y^2. \tag{99}$$

A partir de estas derivadas se tiene

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 24x + 2y, \tag{100}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -12y + 2x, \tag{101}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -12y + 2x, \tag{102}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -12x + 12y. \tag{103}$$

En este caso las derivadas cruzadas son idénticas, pero existen casos donde no se presenta esta igualdad.

3.2. Máximos y mínimos

Los puntos críticos de la función $f = f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0) deben de cumplir con los siguientes criterios

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \tag{104}$$

$$\text{Máximo: } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0 \text{ y } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < 0, \tag{105}$$

$$\text{Mínimo: } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0 \text{ y } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0. \tag{106}$$

Para estos dos casos, la cantidad

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) \tag{107}$$

debe ser mayor que cero. Sin embargo, para un punto de inflexión $\Delta < 0$.

3.3. Diferencial total

Al igual que en el caso unidimensional, la diferencial da una idea de cambios infinitesimales sobre una función. En el caso de que $f = f(x, y)$, esta diferencial tendrá dos contribuciones y se escribe de la siguiente manera

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x dy. \tag{108}$$

A esta cantidad se le conoce como diferencial total y su extensión a más dimensiones es directa, por ejemplo, en el caso $f = f(x, y, z)$ se tiene

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} dz. \tag{109}$$

3.4. Gradiente, laplaciano, divergencia y rotacional

Existen varios operadores que se construyen a partir de las derivadas parciales de un función que depende en 3 variables. A continuación se enlistan estos operadores

1. Gradiente

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}, \tag{110}$$

$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{k}$ representan los vectores unitarios de un sistema definido en coordenadas cartesianas. Es evidente que al actuar el gradiente sobre una función escalar el resultado es una cantidad vectorial.

2. Divergencia
$$\nabla \bullet \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{111}$$
En este caso $\vec{A}$ es un vector que depende en las variables x, y y z y cada una de sus componentes es derivada con su respectiva coordenada cartesiana.

3. Laplaciano
$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \tag{112}$$
Este operador puede ser visto como la composición del operador gradiente y el operador divergencia.
$$\begin{aligned} \nabla^2 f &= \nabla \bullet \nabla f && (113)\\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) \bullet \left(\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) && (114)\\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} && (115) \end{aligned}$$

4. Rotacional
$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \tag{116}$$

Ejemplo

Obtenga el laplaciano de la función $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ aplicando primero el gradiente y luego la divergencia. Las primeras derivadas de esta función tiene una forma similar entre sí. Por ejemplo, para la derivada con respecto a x, se tiene
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y^2 + z^2\right), \tag{117}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{1}{2}} 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{f}, \tag{118}$$
de manera similar se obtiene
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{f}, \tag{119}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{f}. \tag{120}$$

Así, el gradiente tiene la forma

$$\nabla f = \frac{1}{f}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) = \frac{1}{f}(x, y, z) = \frac{\vec{r}}{f}. \tag{121}$$

Para la divergencia se tiene

$$\begin{aligned} \nabla^2 f = \nabla \bullet \nabla f &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right) \bullet (\frac{x}{f}\boldsymbol{i} + \frac{y}{f}\boldsymbol{j} + \frac{z}{f}\boldsymbol{k}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{f}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{f}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{f}\right). \end{aligned} \tag{122}$$

Para la derivada con respecto a x se obtiene que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{f}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(xf^{-1}\right) = f^{-1} - xf^{-2}\frac{\partial f}{\partial x}, \tag{123}$$

sustituyendo la ecuación 118 en la última expresión se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{f}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(xf^{-1}\right) = f^{-1} - f^{-2}\frac{x^2}{f}. \tag{124}$$

De manera análoga se obtiene para y y z que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{f}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(yf^{-1}\right) = f^{-1} - f^{-2}\frac{y^2}{f}, \tag{125}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{f}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(zf^{-1}\right) = f^{-1} - f^{-2}\frac{z^2}{f}. \tag{126}$$

Obteniendo el resultado deseado

$$\nabla^2 f = 3f^{-1} - f^{-3}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = \frac{2}{f}. \tag{127}$$

4. Números Complejos

4.1. Introducción

Tratemos de resolver la ecuación

$$x^2 + 1 = 0. \tag{128}$$

La solución está dada por

$$x = \pm\sqrt{-1}. \tag{129}$$

Definición

$$i = \sqrt{-1} \tag{130}$$

$$i^2 = -1. \tag{131}$$

En general un número complejo, Z, se puede escribir como

$$Z = a + ib. \tag{132}$$

Siendo a la parte real y b la parte imaginaria, estas cantidades también son denotadas de la siguiente manera:

$$Re\,[Z] = a\ ;\ Im\,[Z] = b. \tag{133}$$

Desde un punto de vista geométrico el número complejo Z puede definirse como un vector

$$Z = (a, b) \tag{134}$$

De esta manera un número real tendrá coordenadas

$$(a, 0)\,, \tag{135}$$

y un número imaginario puro

$$(0, b)\,. \tag{136}$$

Por lo tanto, Z tendrá norma (o módulo),

$$\|Z\| = \sqrt{a^2 + b^2}, \tag{137}$$

y el argumento está dado por

$$\tan(\theta) = \frac{b}{a}. \tag{138}$$

4.2. Operaciones entre números complejos

Si $Z_1 = a_1 + ib_1$ y $Z_2 = a_2 + ib_2$ representan dos números complejos, entonces se definen las siguientes operaciones:

- Suma

$$Z_1 + Z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2). \tag{139}$$

- Producto

$$Z_1 Z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2). \tag{140}$$

  Si Z_1 y Z_2 son iguales, entonces

$$Z_1^2 = a_1^2 - b_1^2 + 2ia_1 b_1. \tag{141}$$

- Complejo conjugado

  Si $Z = a + ib$ entonces el complejo conjugado, $\bar{Z}$ (o también Z^*), se define como

$$\bar{Z} = Z^* = a - ib. \tag{142}$$

  Con esta definición se tiene que

$$Z\bar{Z} = ZZ^* = a^2 + b^2. \tag{143}$$

  Por lo tanto

$$Z\bar{Z} = ZZ^* = \|Z\|^2. \tag{144}$$

- División

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)},$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a_1 a_2 - ia_1 b_2 + ib_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 - ib_2 a_2 + ib_2 a_2 + b_2^2}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\|Z_2\|^2} + i\frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{\|Z_2\|^2}. \tag{145}$$

  ¿ Cuál es el resultado si $Z_2 = Z_1$?

4.3. Representación Polar

De la representación cartesiana del número complejo Z se obtiene que

$$a = \|Z\| \cos(\theta); b = \|Z\| \sin(\theta). \tag{146}$$

Tal que

$$Z = \|Z\|(\cos(\theta) + i \sin(\theta)). \tag{147}$$

4.3.1. La fórmula de Euler

Existe una relación muy importante entre las funciones exponencial, seno y coseno. Esta relación se establece cuando se hace un desarrollo en series de Taylor de ellas. Partiendo de la serie de Taylor de la función exponencial se tiene

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + .. \tag{148}$$

si $x = i\theta$

$$\exp(i\theta) = 1 + i\theta - \frac{1}{2}\theta^2 - i\frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{4!}\theta^4 + i\frac{1}{5!}\theta^5 + .. \tag{149}$$

$$\exp(i\theta) = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 + .. + i(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 + ..) \tag{150}$$

Por otro lado, se sabe que

$$\cos(\theta) = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \tag{151}$$

y

$$\mathrm{sen}(\theta) = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 + .. \tag{152}$$

De aquí se establece la fórmula de Euler

$$\exp(i\theta) = \cos(\theta) + i \sin(\theta), \tag{153}$$

Haciendo uso de la fórmula de Euler se encuentra la representación polar de un número complejo

$$Z = \|Z\| \exp(i\theta). \tag{154}$$

4.3.2. Potencias de un número complejo: Fórmula de De Moivre

La representación polar de un número complejo es conveniente para obtener sus potencias

$$Z^n = \|Z\|^n \exp(i\theta n) = \|Z\|^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)), \tag{155}$$

también es cierto que

$$Z^n = \|Z\|^n(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n, \tag{156}$$

y por lo tanto

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta). \tag{157}$$

4.4. Rotación de un número complejo

Vamos a suponer que tenemos al número $Z = \|Z\|\exp(i\theta)$ y lo multiplicamos por $\exp(i\alpha)$. ¿Cuál es el resultado de esta oparación?

$$\exp(i\alpha)\|Z\|\exp(i\theta) = \|Z\|\exp(i(\alpha + \theta)). \tag{158}$$

Se encuentra otro número complejo con la misma norma y ángulo $\alpha + \theta$.
Ejemplo
Multiplicar al número 1 por $\exp(\frac{\pi}{2}i)$.
$(1)\exp\left(\frac{\pi}{2}i\right) = cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isen(\frac{\pi}{2}) = i$
Podemos ver este ejemplo como la rotación del vector $(1, 0)$ en 90 grados para pasar al vector $(0, i)$.

4.5. Raíces del 1

El número Z_k representa una raíz del número 1 si cumple con

$$Z_k^n = 1. \tag{159}$$

Vamos a suponer que estamos interesados en las raíces cúbicas del 1. Entonces proponemos al número $Z_k = \exp(\frac{2\pi k}{3}i)$ con $k = 0, 1, 2$. ¿Cumple este número con $Z_k^3 = 1$?

$$Z_k^3 = \exp(2\pi ki) = \cos(2\pi k) + i\sin(2\pi k). \tag{160}$$

Por lo tanto, $Z_k = \exp(\frac{2\pi k}{3}i)$ son las raíces cúbicas del 1, con $k = 0, 1, 2$

- $Z_0 = \exp(0) = 1$

- $Z_1 = \exp(\frac{2\pi}{3}i) = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3})$
- $Z_2 = \exp(\frac{4\pi}{3}i) = \cos(\frac{4\pi}{3}) + i\sin(\frac{4\pi}{3})$

En general, la raíz n-ésima del 1 está dada por

$$Z_k = \exp(\frac{2\pi k}{n}i), \tag{161}$$

con $k = 0, 1, .., (n-1)$.

5. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

Cuando nos indican que resolvamos para x la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \tag{162}$$

significa que necesitamos una $x(t)$ tal que cuando se derive con respecto a t dos veces, le sumemos la misma función multiplicada por la constante ω^2 se obtenga como resultado cero. En este ejemplo se tiene una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, en general una ecuación ordinaria de orden n tendrá la forma

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + .. + a_0(x)y + f(x) = 0. \tag{163}$$

El orden de la ecuación diferencial está marcado por el grado máximo de la derivada. En la ecuación 163 los coeficientes de las derivadas tienen una dependencia explícita en x y también dentro de la misma ecuación se puede tener una dependencia en x a través de la función $f(x)$.

5.1. Factor integrante

El caso general de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden es

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = r(x), \tag{164}$$

cuya solución es

$$y(x) = \frac{1}{q(x)}\left(\int q(x)r(x)dx + k\right), \tag{165}$$

siendo k una constante de integración y $q(x)$ es el factor integrante cuya expresión es

$$q(x) = \exp\left(\int p(x)dx\right). \tag{166}$$

Ejemplo

Encuentre la solución particular de la ecuación diferencial

$$m\frac{dv(t)}{dt} = -mg - bv(t), \tag{167}$$

siendo m, b y g constantes, imponiendo que $v(t=0) = v_0$.

Esta ecuación también se puede escribir como

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{b}{m} v(t) = -g. \tag{168}$$

A partir de esta forma de la ecuación podemos identificar a $p(t) = \frac{b}{m}$ y con esto encontrar el factor integrante

$$q(t) = \exp\left(\int \frac{b}{m} dt\right) = \exp\left(\frac{b}{m} t\right). \tag{169}$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación 165 y reconociendo que $r(t) = -g$

$$v(t) = \frac{1}{\exp\left(\frac{b}{m}t\right)} \left(\int \exp(\frac{b}{m}t)(-g)dt + k\right), \tag{170}$$

$$\begin{aligned} v(t) &= \exp\left(-\frac{b}{m}t\right)(-g)\int \exp\left(\frac{b}{m}t\right) dt + k\exp\left(-\frac{b}{m}t\right), \\ &= \exp\left(-\frac{b}{m}t\right)(-g)\frac{m}{b}\exp\left(\frac{b}{m}t\right) + k\exp\left(-\frac{b}{m}t\right), \\ &= -\frac{gm}{b} + k\exp\left(-\frac{b}{m}t\right). \end{aligned} \tag{171}$$

La ecuación 171 representa la solución general de la ecuación diferencial 167. Para encontrar la solución particular se debe de imponer la condición inicial $v(t=0) = v_0$, obteniendo que

$$v_0 = -\frac{gm}{b} + k, \tag{172}$$

fijando así el valor de la constante de integración k,

$$k = v_0 + \frac{gm}{b}, \tag{173}$$

con lo que

$$v(t) = -\frac{gm}{b} + \left(v_0 - \frac{gm}{b}\right)\exp\left(-\frac{b}{m}t\right). \tag{174}$$

Lo que se ha hecho es resolver las ecuaciones de Newton para una partícula que cae dentro de un campo gravitacional con una fuerza que se impone al movimiento, $F_{resistencia} = -bv(t)$, y que simula la resistencia del aire. Si nos interesa conocer la trayectoria de la partícula entonces debemos de resolver la ecuación diferencial

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -\frac{gm}{b} + \left(v_0 - \frac{gm}{b}\right)\exp\left(-\frac{b}{m}t\right). \tag{175}$$

Si $x(t=0) = x_0$ encuentre la expresión para $x(t)$.

5.2. Separación de variables

Este método está basado en tener términos individuales que dependan exclusivamente de una variable

Ejemplo

Resuelva $(x + xy^2)\, dx + e^{x^2} ydy = 0$
En el primer término es posible factorizar a x,

$$x\left(1 + y^2\right) dx + e^{x^2} ydy = 0,$$

y luego se pasa el segundo término al lado derecho de la ecuación,

$$\frac{xdx}{e^{x^2}} = -\frac{ydy}{(1 + y^2)},$$

$$e^{-x^2} xdx = -\frac{ydy}{(1 + y^2)}.$$

Al tener esta expresión es claro que se han separado cada una de las variables, a la izquierda x y a la derecha y, con lo cual se puede integrar en cada lado,

$$\int e^{-x^2} xdx = -\int \frac{ydy}{(1 + y^2)}.$$

Definiendo $u = -x^2$ ($du = -2xdx, -\frac{du}{2} = xdx$) y $v = 1 + y^2$ ($dv = 2ydy, \frac{dv}{2} = ydy$), se tiene

$$\int e^u \left(-\frac{du}{2}\right) = -\int \frac{dv}{2v}.$$

Evidentemente, el signo menos y el $\frac{1}{2}$ se cancelan para tener

$$\int e^u du = \int \frac{dv}{v}.$$

Finalmente, al integrar se tiene

$$e^u = \ln v + k,$$

o también

$$e^{-x^2} = \ln\left(1 + y^2\right) + k,$$

$$e^{e^{-x^2} - k} - 1 = y^2,$$

$$y = \sqrt{Ae^{e^{-x^2}} - 1}.$$