

Tamaño y Vida

A.L. Salas Brito y H. N. Núñez Yepez

Muchas relaciones científicas se expresan usando relaciones matemáticas de algún tipo, por ejemplo, las leyes de la herencia se pueden expresar como probabilidades de que tal o cual carácter se manifieste en los descendientes inmediatos de un organismo (caracteres dominantes), o hasta la segunda generación (caracteres recesivos).

Otras relaciones son más simples, no hacen intervenir a la probabilidad, sino que nos dicen directamente cómo alguna cantidad depende de otra. Nos relacionan, por ejemplo, la producción de energía en un organismo con la masa corporal del mismo. Estas relaciones son muy útiles en la biología, pues permiten sintetizar grandes volúmenes de datos en una sola ecuación o con una simple gráfica. En este módulo trataremos de introducirte al uso de este tipo de relaciones e ilustrarlas con ejemplos de interés para la biología. Comenzaremos con un repaso de conceptos básicos con los que esperamos, estés familiarizado. Te recordaremos el significado de la relación de proporcionalidad directa, de la inversa y sus representaciones gráficas, ello con el fin de introducirte al uso de las relaciones alométricas, relaciones de uso muy frecuente en biología. Las que te permitirán, por ejemplo, visualizar el efecto de cambios en el tamaño corporal sobre la fisiología de los organismos. La primera parte la escribimos nosotros; cuando termines de leerla, continuarás con los dos primeros capítulos del libro *Tamaño y Vida*, (T A McMahon y J T Bonner, Editorial Labor, 1986) en el que encontrarás la mayoría de los ejemplos. Antes de comenzar a estudiar el módulo consigue lápices y papel cuadriculado pues tendrás que trazar muchas gráficas.

Relaciones Matemáticas

Imagínate que llenas de gasolina el tanque de tu automóvil ¿cuánto tardas en gastarla? este tiempo depende de cuánto uses tu automóvil no es lo mismo que lo dejes un mes en tu cochera a que lo uses todos los días para visitar a un amigo en Cuernavaca. El consumo de gasolina que hagas dependerá de las distancias que recorras en él. Como las distancias que puedes recorrer varían -puedes quedarte en casa y recorrer distancia cero, o puedes ir a Puebla y recorrer 150 km- decimos que la distancia es una variable; por las mismas razones, también al consumo de gasolina se le puede llamar variable.

Casi a cualquier cantidad se le puede llamar variable, por ejemplo, la masa de una rata de laboratorio varía cuando variamos la cantidad de grasas que le damos en su alimento, el tamaño de tu cintura disminuye cuando aumentas el tiempo que dedicas a ejercitarte. Esperamos que te sea claro que a las cantidades anteriores podemos, sin más, bautizarlas como variables.

Al hablar de variables, siempre tuvimos en mente una relación entre ellas: variar una, significó cambiar la otra también. Cuando esto ocurre, se dice que existe una relación funcional o, más simplemente, una función que relaciona las variables. Así, el consumo de gasolina es una función de la distancia que recorres con tu automóvil; la producción de energía es función de la masa del organismo, etcétera. Las ecuaciones, tablas y gráficas con que trataremos en las siguientes secciones, son medios para representar funciones.

1. Proporcionalidad Directa

Comenzaremos con la relación más simple entre dos variables, la llamada proporcionalidad directa. Para ilustrarla, un ejemplo cotidiano sirve muy bien: la relación que hay entre el peso de, digamos, uvas que compras y su precio, es una relación de proporcionalidad directa. Si compras 1/2 kg de uvas, el costo es \$ 20.00; si compras 1 kg, el costo es \$ 40.00, cuando compras dos kilos, el costo es \$ 80.00, etcétera. Esta relación, en la cual al duplicar el peso de uvas se duplica el precio, al triplicar el peso se triplica el precio, etcétera; es lo que significa que dos cantidades varíen en proporción directa.

Encontrarás tantos casos de proporción directa en tus estudios, que es conveniente que aprendas las diferentes formas en que se describe esta relación. Podemos decir que el precio "es proporcional a" el peso de las uvas que compres, o que el precio "varía directamente con" el peso de la uva. Ambas aseveraciones significan la misma cosa: el doble del peso nos indica el doble en el precio, diez veces el peso nos indicará un precio diez veces mayor, y así sucesivamente.

Es muy útil recordar que si dos cantidades son directamente proporcionales, el cociente entre ambas es constante. Por ejemplo, como el peso y el costo de las uvas están relacionados mediante una proporción directa, su cociente b , es una constante: el precio por kilogramo de uva. A b se le llama la constante de proporcionalidad.

Podemos ilustrar esta relación entre el precio y el peso de las uvas, mediante una gráfica. Debemos elegir escalas apropiadas, una sobre el eje vertical, marcando un número de pesos en cada división hecha sobre el papel, y otra en el eje horizontal, marcando el peso en kg. Una vez elegidas las escalas, podemos marcar los puntos correspondientes (peso, costo) sobre el papel para cada par de valores y así obtener la gráfica que mostramos en la figura 1. Esta es la forma típica que toma la gráfica de dos variables entre las que hay una relación de proporcionalidad directa.

Un ejemplo más de proporcionalidad directa es la relación entre el volumen V de un pedazo de hierro y su peso P . Si medimos, lo que encontramos es que: 30 cm³ pesan 200 g, 60 cm³ pesan 400 g, 90 cm³ pesan 600 g y así sucesivamente. Esta relación nos dice que el peso del hierro varía en proporción directa a su volumen. Podemos escribir la relación en una forma simbólica: $P \propto V$, donde P es el peso de una pieza de hierro, V su volumen, y el símbolo \propto significa "es proporcional a". Si tenemos dos volúmenes de hierro diferentes, V y V' , el hecho de que sus pesos P y P' sean proporcionales a sus volúmenes, se puede expresar como:

$$\frac{P'}{P} = \frac{V'}{V}, P \propto V \text{ es solamente otra forma de escribir la proporcionalidad.}$$

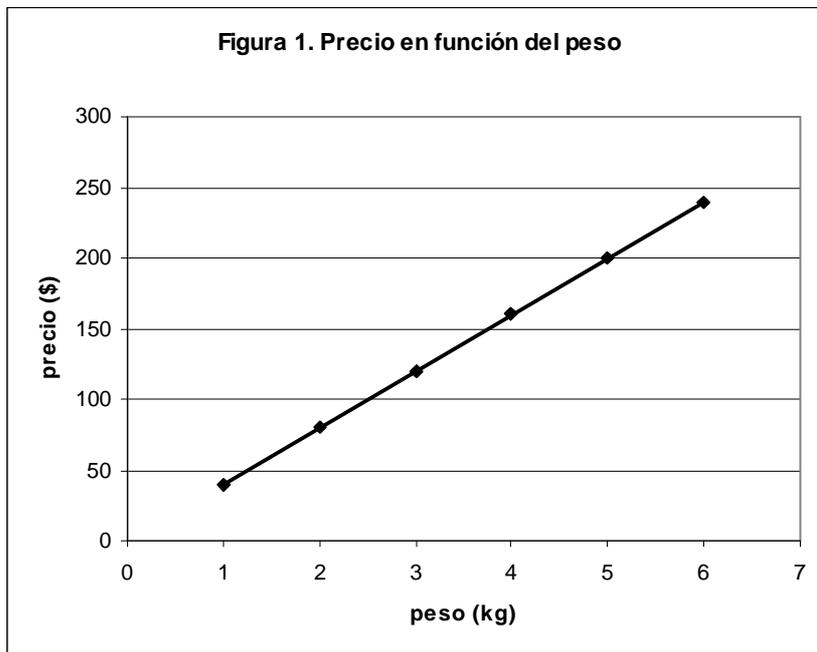


Figura 1. Representación gráfica de la relación entre el precio y el peso de las uvas. Como estas variables son directamente proporcionales, la gráfica es una línea recta. Si el precio de 1 kg de uvas fuese menor ¿sería menor o mayor la inclinación (pendiente) de la recta?

Como el peso y el volumen están relacionados mediante una proporción directa, su cociente debe ser una constante; si dividimos el peso de una muestra de hierro entre su volumen, el resultado será el mismo que si dividimos el peso de otra muestra de hierro entre su correspondiente volumen:

$$\left(\frac{P}{V}\right)_{una} = \left(\frac{P}{V}\right)_{otra} = b \quad (2)$$

El cociente b es la constante de proporcionalidad entre el peso y el volumen del hierro. En este ejemplo, $b = 6.7$ gramos por centímetro cúbico. Podemos expresar esta relación como una ecuación para cualquier pedazo de hierro:

$$\frac{P}{V} = b \quad \text{o} \quad P = bV \quad (3)$$

Nota que esta expresión es muy similar a la relación $P \propto V$. Si no conocemos el valor numérico de b sabemos que la relación entre P y V es lineal. Pero cuando b es conocido, $P = bV$ nos da mayor información; es una ecuación que nos proporciona la relación numérica entre las dos variables P y V .

La relación entre el peso y el volumen para el hierro se puede ilustrar, como en el caso de las uvas, mediante una gráfica. Usa los datos que están en la siguiente tabla para trazar la gráfica; no te olvides de indicar claramente las subdivisiones y unidades de lo que graficas.

Volumen/cm ³	Peso/g
15	100
30	200
60	400
90	600
120	800

La gráfica que debiste obtener es una línea recta, en ella deben aparecer los valores de V y los correspondientes de P. Puedes ver que el cociente P/V es el mismo en todos los casos. Así mismo, esta gráfica muestra visualmente el significado de la ecuación $P = bV$, y se dice que la representa. Todas las proporciones directas se representan por gráficas de líneas rectas tal como la que acabas de dibujar. Diferentes líneas rectas o diferentes escalas en el eje vertical corresponden a diferentes valores para la constante de proporcionalidad b.

No toda línea recta representa una relación de proporcionalidad directa, para que lo haga, la gráfica debe pasar por el origen ¿ves el por qué?

EJERCICIOS

1. Para que no tengas malas ideas. Te habrás dado cuenta que la famosa regla de tres tan cara a muchos estudiantes, solo es utilizable cuando entre las variables existe una relación de proporcionalidad directa. Para mala fortuna de algunos, muchas relaciones de interés no son relaciones de proporcionalidad directa, luego entonces ...

Este es un viejo problema. Tenemos una cepa bacteriana que se reproduce por bipartición cada 15 minutos, si disponemos un cultivo de ella en una caja de Petri y ésta tarda 2 horas en llenarse completamente ¿cuánto tardará en llenarse a la mitad?

2. Escribe una justificación de por qué no siempre una recta representa una relación de proporcionalidad directa. Ejemplifica.

3. ¿Cuánto vale b en el ejemplo de las uvas? Usando este valor de b, escribe una ecuación que te permita calcular el precio de cualquier cantidad de uvas que compres.

4. El espesor de 500 hojas de cierto tipo de papel es de 40 mm. Suponiendo que todas las hojas tienen el mismo grosor, dibuja una gráfica de espesor total contra el número de hojas. Determina la constante de proporcionalidad b, ¿cuánto vale el espesor de una sola hoja? ¿Cuál es el espesor de 200, 300, 600 hojas?