Capítulo 3. Los fundamentos de la mecánica cuántica

3. Los fundamentos de la mecánica cuántica

La mecánica cuántica se puede construir a partir de un conjunto de axiomas o postulados que permiten obtener cantidades que son comparables directamente con las mediciones experimentales.

3.1. Los postulados de la mecánica cuántica

(1) Todo observable físico $\left(x, p, E, L, \ldots\right)$ tiene asociado un operador hermitiano. La medición de este observable resulta ser un elemento del conjunto de los valores propios del operador.

(2) Cada sistema está caracterizado por una *función de onda*, $\left|\Psi\right\rangle = \Psi\left(r,t\right)$, la cual contiene toda la información acerca del sistema.

Normalmente se elige a la función de onda Ψ de tal forma que $\left\langle\Psi\middle|\Psi\right\rangle = 1$. En este caso se dice que la función de onda está normalizada.

Ejemplo 1. Una partícula está limitada a moverse en la semirrecta $x \geq 0$. La función de onda $\Psi\left(x\right) = Nx^2 e^{-3x/a_0}$ representa a este sistema, en donde N y a_0 son constantes. Entonces, el valor de N se obtiene a partir de la normalización, $\left\langle\Psi\middle|\Psi\right\rangle = 1$. Así,

$1 = \left\langle\Psi\middle|\Psi\right\rangle = \int_0^\infty \Psi^*\Psi\, dx = N^2 \int_0^\infty x^4 e^{-6x/a_0}\, dx = N^2 \left(\dfrac{a_0}{6}\right)^4 4!$ y $1 = N^2 \left(\dfrac{a_0}{6}\right)^4 4!$. Por lo tanto, $N = 18 / a_0^{5/2}$. Los detalles sobre el procedimiento de integración están en el anexo 3.1. ❆

3.2. El proceso de medición

Sean $\left\{u_n\right\}$ el conjunto de funciones propias del operador asociado con el observable A y $\left\{a_n\right\}$ su espectro. Si $\left|\Psi\right\rangle$ es la función de onda del sistema, se tiene alguno de los dos casos siguientes:

(a) cuando la función de onda coincide con una función propia, $\left|\Psi\right\rangle = \left|u_n\right\rangle$, entonces al medir el observable A sólo se obtiene el valor propio correspondiente, a_n;

(b) cuando la función de onda no coincide con ninguna función propia, $\left|\Psi\right\rangle \neq \left|u_n\right\rangle$, entonces al medir el observable A se obtienen todos los valores propios, pero la probabilidad de medir el valor a_n es igual a $P(a_n) = \left|\left\langle n|\Psi\right\rangle\right|^2$.

Para que las cantidades $P(a_n)$ se puedan interpretar como probabilidades, basta con demostrar que son siempre positivas y que suman a uno. A partir de su definición es claro que se cumple la primera condición, mientras que la segunda se obtiene a continuación. Al desarrollar a $\left|\Psi\right\rangle$ en términos de la funciones propias de $\hat{A}$ se tiene que

$$\left|\Psi\right\rangle = \sum_n b_n \left|n\right\rangle , \tag{3.1}$$

en donde $b_n = \left\langle n|\Psi\right\rangle$. Pero como la función Ψ está normalizada,

$$\left\langle \Psi|\Psi\right\rangle = \sum_{nm} b_n^* b_m \left\langle n|m\right\rangle = \sum_{nm} \delta_{nm} b_n^* b_m = \sum_n \left|b_n\right|^2 = 1 , \tag{3.2}$$

entonces $\sum_n P(a_n) = \sum_n \left|b_n\right|^2 = 1$.

Cuando la función de onda no es una función propia del operador $\hat{A}$, en la medición del observable A se obtienen diferentes valores con diferentes probabilidades relativas. El promedio de estas mediciones resulta ser

$$\left\langle A\right\rangle = \sum_n a_n P(a_n) = \sum_n a_n \left|b_n\right|^2 = \sum_n \left\langle \Psi|n\right\rangle a_n \left\langle n|\Psi\right\rangle . \tag{3.3}$$

Pero aprovechando la propiedad de hermiticidad del operador, se obtiene que

$$\begin{aligned}\left\langle A\right\rangle &= \sum_n \left\langle \Psi|n\right\rangle \left\langle a_n u_n|\Psi\right\rangle = \sum_n \left\langle \Psi|n\right\rangle \left\langle \hat{A}u_n|\Psi\right\rangle \\ &= \sum_n \left\langle \Psi|n\right\rangle \left\langle n|\hat{A}\Psi\right\rangle = \left\langle \Psi\left|\sum_n |n\rangle\langle n|\right|\hat{A}\Psi\right\rangle \\ &= \left\langle \Psi|\hat{A}\Psi\right\rangle\end{aligned} . \tag{3.4}$$

Por lo tanto, el promedio de las mediciones del observable A, en un sistema descrito por la función de onda $\left|\Psi\right\rangle$, se puede calcular mediante el braket que incluye a su operador asociado, $\left\langle\Psi\middle|\hat{A}\Psi\right\rangle$. A este braket se le llama el valor esperado del operador.

Ejemplo 2. Para la función de onda $\Psi(x) = Nx^2 e^{-3x/a_0}$ de una partícula, que está en la semirrecta $x \geq 0$, los valores esperados de los operadores $\hat{D}$ y $\hat{D}^2$ corresponden a las integrales $\left\langle\Psi\middle|\hat{D}\Psi\right\rangle = \int_0^\infty \Psi^*\Psi' dx$ y $\left\langle\Psi\middle|\hat{D}^2\Psi\right\rangle = \int_0^\infty \Psi^*\Psi'' dx$, respectivamente. Entonces, al evaluar las integrales se tiene que $\left\langle\Psi\middle|\hat{D}\Psi\right\rangle = N^2 \int_0^\infty x^2 e^{-3x/a_0}\left(2x - 3x^2/a_0\right)e^{-3x/a_0}\, dx = 0$ y $\left\langle\Psi\middle|\hat{D}^2\Psi\right\rangle = N^2 \int_0^\infty x^2 e^{-3x/a_0}\left(2 - 12x/a_0 + 9x^2/a_0^2\right)e^{-3x/a_0}\, dx = -3/a_0^2$.❄

3.3. La forma de los operadores

Existen varias formas de construir el operador asociado con un observable, pero sólo presentaremos la más usada. Primero, es necesario escribir al observable como función de posiciones y momentos, al igual que en la formulación de Hamilton de la mecánica clásica, $A = A(x, p)$. Posteriormente se remplazan las posiciones y los momentos por los operadores $\hat{x}$ y $\hat{p}$:

$$\hat{x} = x\,, \qquad \hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dx}\,. \tag{3.5}$$

Estos operadores cumplen con la propiedad $\left[\hat{x}, \hat{p}\right] = i\hbar$. Así,

$$\hat{A} \equiv A(\hat{x}, \hat{p}) = A\left(x, -i\hbar\frac{d}{dx}\right). \tag{3.6}$$

Es importante verificar que el operador resultante sea hermitiano.

Ejemplo 3. El promedio de la posición se calcule mediante el valor esperado $\langle x\rangle=\langle\Psi|\hat{x}\Psi\rangle$. Para la partícula confinada en la semirrecta $x\geq 0$, con $\Psi=Nx^2e^{-3x/a_0}$, el promedio se calcule mediante la integral $\langle x\rangle=N^2\int_0^\infty x\left(x^2e^{-3x/a_0}\right)^2dx=\frac{5a_0}{6}$.❉

Ejemplo 4. Para la misma función de onda, se calculan los promedios del momento $\langle p\rangle=\langle\Psi|\hat{p}\Psi\rangle$ y del cuadrado del momento $\langle p^2\rangle=\langle\Psi|\hat{p}^2\Psi\rangle$. A partir de la ecuación (3.5), se tiene que $\langle p\rangle=-i\hbar\langle\Psi|\hat{D}\Psi\rangle=0$ y $\langle p^2\rangle=-\hbar^2\langle\Psi|\hat{D}^2\Psi\rangle=3\hbar^2/a_0^2$. El promedio del momento es cero porque la partícula desplaza tanto hacia la derecha como a la izquierda, de tal manera que el promedio se anula.❉

Teorema. Si dos operadores conmutan, entonces tienen funciones propias comunes.

Demostración. Sean $\hat{A}$ y $\hat{B}$ dos operadores que conmutan. Considere la ecuación de valores propios del operador $\hat{A}$,

$$\hat{A}u_a=au_a, \tag{3.7}$$

al aplicar el operador $\hat{B}$ en ambos lados se tiene que

$$\begin{aligned}\hat{B}\hat{A}u_a&=B\left(au_a\right)\\ \hat{A}\left(\hat{B}u_a\right)&=a\left(\hat{B}u_a\right)'\end{aligned} \tag{3.8}$$

por lo tanto $\hat{B}u_a$ es función propia de $\hat{A}$ con valor propio igual a a.

Caso 1 (estado no degenerado). Cuando sólo hay una función propia de $\hat{A}$ con valor propio igual a a, la función $\hat{B}u_a$ debe ser proporcional a u_a, entonces $\hat{B}u_a=bu_a$. Esto demuestra el teorema.

Caso 2 (estado degenerado). Cuando existen M funciones propias de $\hat{A}$ con valor propio igual a a,

$$\hat{A}|j\rangle=a|j\rangle,\qquad j=1,2,\ldots,M, \tag{3.9}$$

la función $\hat{B}\left|k\right\rangle$ es una combinación lineal de las funciones propias que tienen el mismo valor propio (funciones degeneradas),

$$\hat{B}\left|k\right\rangle = \sum_{j=1}^{M} c_{jk}\left|j\right\rangle, \tag{3.10}$$

en donde $c_{jk} = \left\langle j\right|\hat{B}\left|k\right\rangle$. Esto también ocurre con cualquier combinación lineal de las funciones degeneradas,

$$\hat{B}\left(\sum_k \beta_k \left|k\right\rangle\right) = \sum_{kj} \beta_k c_{jk}\left|j\right\rangle. \tag{3.11}$$

Los coeficientes β_k se pueden elegir de tal forma que la combinación lineal $\sum_k \beta_k \left|k\right\rangle$ sea una función propia del operador $\hat{B}$, entonces se debe cumplir la condición

$$\sum_{kj} \beta_k c_{jk}\left|j\right\rangle = b\sum_j \beta_j \left|j\right\rangle, \tag{3.12}$$

o bien,

$$\sum_k c_{jk}\beta_k = b\beta_j. \tag{3.13}$$

En notación matricial, la ecuación anterior toma la forma siguiente,

$$\mathbf{c}\vec{\beta} = b\vec{\beta}, \tag{3.14}$$

en donde los vectores $\vec{\beta}$ son los M vectores propios de la matriz hermitiana $\mathbf{c}$, cuyos elementos son $c_{jk} = \left\langle j\right|\hat{B}\left|k\right\rangle$. Así, las funciones $\sum_k \beta_k \left|k\right\rangle$ son simultáneamente funciones propias de los operadores $\hat{A}$ y $\hat{B}$.❆

De aquí que, cuando dos operadores conmutan, entonces los observables correspondientes se pueden determinar simultáneamente.

$$A \to a \to u_a \to b. \tag{3.15}$$

Ejemplo 5. Los operadores de posición y momento no conmutan, $\left[\hat{x},\hat{p}\right]=ih$. Por lo tanto, ambas propiedades no se pueden determinar simultáneamente.❉

3.4. La interpretación de la función de onda

Considere un caso sencillo en donde es posible asociarle un significado a la función de onda. Para una partícula descrita por la función de onda Ψ, el valor promedio de la posición está dado por el valor esperado del operador de la posición:

$$\left\langle x\right\rangle=\int\Psi^{*}\hat{x}\Psi dx=\int x\left|\Psi\right|^{2}dx, \tag{3.16}$$

en donde la función de onda está normalizada, $1=\int\left|\Psi\right|^{2}dx$. Dado que la ecuación (3.16) representa al valor promedio de la posición, entonces, es posible identificar a $\Psi^{*}\Psi dx$ como la probabilidad de encontrar a la partícula entre x y $x+dx$. Así, $\left|\Psi\right|^{2}$ es una densidad de probabilidad.

Es importante mencionar que la función de onda no se puede determinar experimentalmente y que sólo su módulo cuadrado se puede interpretar en forma probabilística.

Ejemplo 6. La densidad de probabilidad de la función de onda del ejemplo 1 tiene, en $x_{\max}=2a_0/3$, un valor máximo igual a $P\left(x_{\max}\right)=64e^{-4}/a_0$. Además, la densidad de probabilidad tiende a cero en los límites del dominio. La posición del máximo representa la región de mayor probabilidad de localizar a la partícula, mientras que la probabilidad es mínima en los bordes del dominio. De acuerdo con el ejemplo 3, la posición del máximo no coincide con el valor promedio de la posición.❉

Ejemplo 7. La probabilidad de localizar a la partícula del ejemplo 1 en $x\geq\left\langle x\right\rangle$ se calcula mediante la integración de la densidad de probabilidad en el intervalo $\left(\left\langle x\right\rangle,\infty\right)$. Es decir, $\int_{\left\langle x\right\rangle}^{\infty}\left|\Psi\right|^{2}dx=523e^{-5}/8\approx0.440$, con el valor del promedio calculado en el ejemplo 3. Por lo tanto, hay una probabilidad mayor para localizarla en el intervalo $\left[0,\left\langle x\right\rangle\right]$.❉

3.5. *La ecuación de Schrödinger independiente del tiempo*

Los experimentos más comunes que se realizan para hacer mediciones en sistemas microscópicos corresponden a la absorción o emisión de energía (espectroscopía). En estos casos se mide la diferencia entre los valores propios (espectro) del operador de la energía (operador hamiltoniano). Por esta razón es importante conocer el espectro del operador hamiltoniano para el sistema en estudio. La construcción de este operador requiere del hamiltoniano clásico del sistema. Por ejemplo, para una partícula,

$$\mathsf{H}(\mathbf{r},\mathbf{p})=\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}}{2m}+V(\mathbf{r}). \tag{3.17}$$

El operador se obtiene remplazando al momento por su operador correspondiente. Así,

$$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V(\mathbf{r}). \tag{3.18}$$

Finalmente, el espectro se encuentra al resolver la ecuación de valores propios del operador hamiltoniano, también denominada ecuación de Schrödinger independiente del tiempo,

$$\hat{H}u_E=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2u_E(\mathbf{r})+V(\mathbf{r})u_E(\mathbf{r})=Eu_E. \tag{3.19}$$

Toda función de onda debe ser una función continua, al igual que su derivada. Estas condiciones son necesarias para poder evaluar todos los brakets que se aparecen en la mecánica cuántica. Adicionalmente, la continuidad es importante en la interpretación de la función de onda.

Ejemplo 8. Considerando que la energía potencial en la región del movimiento corresponde a $V(x)=V_0x$, con $V_0>0$, la energía de la partícula del ejemplo 1 es el valor esperado del operador hamiltoniano, $\langle E\rangle=\langle\Psi|\hat{H}\Psi\rangle=\left\langle\Psi\middle|\frac{\hat{p}^2}{2m}\Psi\right\rangle+\langle\Psi|\hat{V}\Psi\rangle$. Al simplificar las integrales y usando los resultados de los ejemplos previos, se tiene que $\langle E\rangle=\frac{1}{2m}\langle\Psi|\hat{p}^2\Psi\rangle+\langle\Psi|V_0x\Psi\rangle=\frac{\langle p^2\rangle}{2m}+V_0\langle x\rangle=\frac{\hbar^2}{6ma_0^2}+\frac{5V_0a_0}{6}$.❄

Es muy relevante comentar que para cada tipo de energía potencial, la ecuación diferencial es diferente, con un espectro y funciones propias característicos. De igual forma, tanto el número de partículas como el número de dimensiones tienen un efecto en la ecuación diferencial de valores propios que se debe resolver.

3.6. *El principio de incertidumbre*

Es importante comentar que una consecuencia directa de la no conmutatividad de los operadores de posición y momento es el principio de incertidumbre. A continuación, se ejemplifica la relación entre las distribuciones de probabilidad asociadas con la medición de ambos operadores para un caso particular. Otras situaciones se discuten en el material auxiliar *El principio de incertidumbre*, junto con un tratamiento más elaborado.

Considere un sistema descrito por una función de onda que da origen a una densidad de probabilidad de tipo gaussiano, centrada en el origen y caracterizada por una dispersión δx. Por ejemplo, la función de onda normalizada

$$\Psi(x)=\left(\sqrt{\pi}\delta x\right)^{-1/2}\exp\left(-\frac{x^2}{2(\delta x)^2}\right), \tag{3.20}$$

cumple con dichas propiedades. En este caso, la densidad de probabilidad tiene la forma

$$P(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\delta x}\exp\left[-\left(\frac{x}{\delta x}\right)^2\right]=P(0)\exp\left[-\left(\frac{x}{\delta x}\right)^2\right]. \tag{3.21}$$

De acuerdo con la sección 3.2, la probabilidad de medir un valor del momento igual a p, está dada por

$$\Pi(p)\equiv\left|\langle p|\Psi\rangle\right|^2=\left|\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{ipx}{\hbar}}e^{-\frac{x^2}{2\delta x^2}}dx\right|^2\frac{P(0)}{2\pi\hbar}, \tag{3.22}$$

e integrando,

$$\Pi(p)=\frac{\delta x}{\sqrt{\pi}\hbar}\exp\left[-\left(\frac{p\delta x}{\hbar}\right)^2\right]=\frac{1}{\delta p\sqrt{\pi}}\exp\left[-\left(\frac{p}{\delta p}\right)^2\right]. \tag{3.23}$$

Observe que la distribución del momento también es gaussiana y que su ancho depende de δx . Comparando con la ecuación (3.21), la dispersión de la nueva distribución es $\delta p = \hbar/\delta x$. Por lo tanto, $\delta x\, \delta p = \hbar$, es decir, las dispersiones en x y en p están relacionadas de forma inversa. En general, se puede demostrar que el producto de las incertidumbres tiene una cota inferior, $\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{1}{2}\hbar$, en donde la incertidumbre de la variable A se define como la raíz de su varianza, $\Delta A \equiv \sqrt{\left\langle A^2 \right\rangle - \left\langle A \right\rangle^2}$.

3.7. *Problemas*

1. Considere a una partícula descrita por la función de onda

$$\psi\left(x,t\right) = A\exp\left\{-\left|x\right|/L - i\,Et/\hbar\right\},$$

definida en toda la recta real y para todo tiempo. (a) Determine el valor de la constante A que normaliza a la función de onda. (b) Calcule $\left\langle x \right\rangle$, $\left\langle x^2 \right\rangle$ y Δx . (c) Obtenga la probabilidad de encontrar a la partícula entre 0 y L , y en el intervalo $\left(L,2L\right)$.

2. Utilizando la función de onda del problema anterior, (a) obtenga $\phi\left(p,t\right) \equiv \left\langle \varphi_p \middle| \psi \right\rangle$. (b) Calcule $\left\langle p \right\rangle$, $\left\langle p^2 \right\rangle$ y Δp . (c) Obtenga la probabilidad de encontrar a la partícula con momento entre 0 y $\hbar/L$, y en el intervalo $\left(\hbar/L, 2\hbar/L,\right)$.

3. Una partícula libre encerrada en la región $\left[0,d\right]$ está descrita por la función de onda $\psi\left(x\right) = A\left(x^3 - x^2 d\right)$. (a) Determine el valor de A que normaliza a la función de onda. (b) Calcule $\left\langle x \right\rangle, \left\langle p \right\rangle$ y $\left\langle p^2 \right\rangle$.

4. Si $\hat{H} = \dfrac{\hat{p}^2}{2m} + V\left(x\right)$, (a) calcule $\left[\hat{H},\hat{x}\right]$. (b) Use el resultado anterior en la expresión

$$\left\langle u_k \middle| \left[\hat{H},\hat{x}\right] \middle| u_l \right\rangle = \left\langle u_k \middle| \hat{H}\hat{x} - \hat{x}\hat{H} \middle| u_l \right\rangle$$

para demostrar que

$$-\frac{\hbar^2}{m}\left\langle u_k \middle| \frac{du_l}{dx} \right\rangle = \left(E_k - E_l\right)\left\langle u_k \middle| x u_l \right\rangle,$$

en donde las funciones u_j son las funciones propias del operador hamiltoniano.

5. Una partícula se puede mover únicamente en el intervalo $(-a,a)$ y está descrita por la función de onda $\Psi(x)=N(a^2-x^2)$. Para esta partícula, calcule N, el valor promedio de la posición, el cuadrado de la posición, el momento, el cuadrado del momento y el lugar en donde la densidad de probabilidad es máxima. También, evalúe la probabilidad de encontrar a la partícula en el intervalo $(0,a)$ y en $(0,a/2)$.

Anexo 3.1. La integración de las funciones exponenciales

En los ejercicios de este capítulo hay varias integrales de funciones exponenciales. Aquí se presenta una forma sistemática para resolverlas.

Para una integral de la forma $\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x}\,dx$, se recomienda hacer el cambio de variable $t \equiv \alpha x$. De esta forma, la exponencial toma una forma más simple y los límites de integración se mantienen, $\int_0^\infty x^n e^{-\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha^{n+1}}\int_0^\infty t^n e^{-t}\,dt$. La potencia en el integrando se reduce al hacer la integración por partes, $\int_0^\infty t^n e^{-t}\,dt = n\int_0^\infty t^{-1n} e^{-t}\,dt$. Si este procedimiento se aplica repetidamente, se obtiene el resultado final, $\int_0^\infty t^n e^{-t}\,dt = n!$.

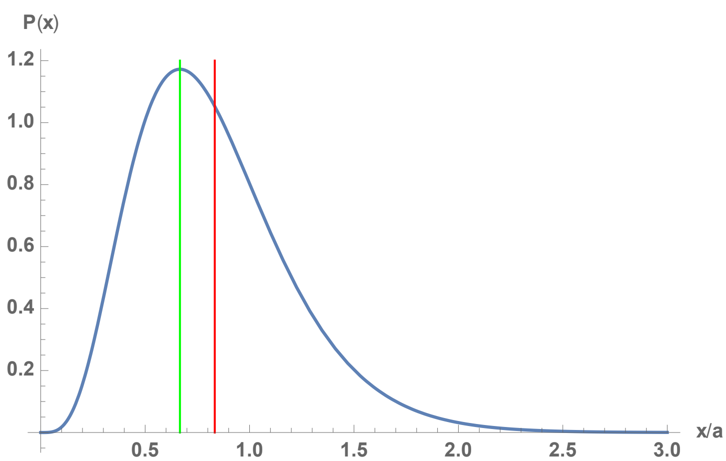

Figura 1. La densidad de probabilidad de la función del ejemplo 1. La línea verde marca la posición del máximo y la roja indica el valor promedio de la posición.

En el ejemplo 1, la función de onda se debe normalizar, $1 = \langle \Psi | \Psi \rangle = N^2 \int_0^\infty x^4 e^{-6x/a_0}\,dx$.

Para evaluar esta integral, el cambio de variable se elige por el argumento de la exponencial, $t \equiv 6x/a_0$. Entonces, $x \equiv a_0 t/6$, $dx \equiv a_0 dt/6$ y los límites de la integral no se alteran porque x y t son proporcionales. Así, el valor de la integral es el siguiente:

$$\int_0^\infty x^4 e^{-6x/a_0}\,dx = \int_0^\infty \left(\frac{a_0 t}{6}\right)^4 e^{-t}\,\frac{a_0}{6}dt = \left(\frac{a_0}{6}\right)^4 \int_0^\infty t^4 e^{-t}\,dt = 4!\left(\frac{a_0}{6}\right)^4.$$

La gráfica de la densidad de probabilidad de este ejemplo está en la figura 1.

Las integrales del ejemplo 2 se evalúan siguiendo el mismo procedimiento del caso anterior. Dado que la función exponencial tiene el mismo argumento, se usa el mismo cambio de variable. Entonces, las integrales se evalúan así:

$$\int_0^\infty x^2 e^{-3x/a_0}\left(2x - 3\frac{x^2}{a_0}\right)e^{-3x/a_0}\,dx = \left(\frac{a_0}{6}\right)^4\left[2\int_0^\infty t^3 e^{-t}\,dt - \tfrac{3}{6}\int_0^\infty t^4 e^{-t}\,dt\right] = \left(\frac{a_0}{6}\right)^4\left[2\cdot 3! - \frac{4!}{2}\right] = 0 \text{ y}$$

$$\int_0^\infty x^2 e^{-3x/a_0}\left(2 - 12\frac{x}{a_0} + 9\frac{x^2}{a_0^2}\right)e^{-3x/a_0}\,dx = \left(\frac{a_0}{6}\right)^3\left[2\int_0^\infty t^3 e^{-t}\,dt - \tfrac{12}{6}\int_0^\infty t^3 e^{-t}\,dt + \tfrac{9}{36}\int_0^\infty t^4 e^{-t}\,dt\right] =$$

$$\int_0^\infty x^2 e^{-3x/a_0}\left(2 - 12\frac{x}{a_0} + 9\frac{x^2}{a_0^2}\right)e^{-3x/a_0}\,dx = \left(\frac{a_0}{6}\right)^3\left[2\cdot 2! - 2\cdot 3! + \frac{4!}{4}\right] = -2\left(\frac{a_0}{6}\right)^3.$$

El cálculo del promedio de la posición sigue un procedimiento similar. La integral es similar a la de la normalización, $\int_0^\infty x\left(x^2 e^{-3x/a_0}\right)^2 dx = \left(\frac{a_0}{6}\right)^6 \int_0^\infty t^5 e^{-t}\,dt = 5!\left(\frac{a_0}{6}\right)^6$.

Finalmente, para evaluar la probabilidad en una región de la recta, se tiene una integral con límites distintos, $\int_{\langle x\rangle}^\infty x^4 e^{-6x/a_0}\,dx = \left(\frac{a_0}{6}\right)^5 \int_{6\langle x\rangle/a_0}^\infty t^4 e^{-t}\,dt = \left(\frac{a_0}{6}\right)^5 \int_5^\infty t^4 e^{-t}\,dt$. La integración por partes reduce la potencia en el integrando y es muy parecida a la realizada antes, $\int_A^\infty t^n e^{-t}\,dt = A^n e^{-A} + n\int_A^\infty t^{n-1} e^{-t}\,dt$. Entonces, este procedimiento se aplica hasta llegar a la potencia cero y el resultado final es el siguiente:

$$\int_{\langle x\rangle}^\infty x^4 e^{-6x/a_0}\,dx = \left(\frac{a_0}{6}\right)^5\left(5^4 + 4\cdot 5^3 + 12\cdot 5^2 + 24\cdot 5 + 24\right)e^{-5} \approx 0.440.$$