

ANDRÉS CEDILLO, *Dept. Química, UAM-Iztapalapa.*

Ejercicios de práctica.

1. En tres dimensiones, las coordenadas cartesianas de un vector (x, y, z) están relacionadas con sus coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) a través de las ecuaciones siguientes: $x = r \sin \theta \cos \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$, $z = r \cos \theta$. Demuestre que

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

2. Calcule el determinante siguiente
$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

3. Si $a_i = 2^i$ representa a algunos números enteros, evalúe $X = \sum_{i=1}^4 a_i$ y $Y = \prod_{i=1}^4 a_i$.

4. Para los vectores $\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}$, en donde \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} son los vectores unitarios en la dirección de los ejes cartesianos, verifique que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z.$$

5. Si $\mathbf{A} = 4\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{B} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, calcule las expresiones siguientes: (a) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, (b) $\mathbf{A} - \mathbf{B}$, (c) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ y (d) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.

6. El momento angular (\mathbf{L}) es un vector definido como $\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, en donde \mathbf{r} es el vector de posición, \mathbf{p} es el vector del momento lineal. Obtenga las componentes cartesianas del momento angular.

7. Sean $x = d\sqrt{\mu^2 - 1}\sqrt{1 - v^2} \cos \phi$, $y = d\sqrt{\mu^2 - 1}\sqrt{1 - v^2} \sin \phi$, $z = d\mu v$, las

componentes del vector \mathbf{r} en coordenadas elípticas ($\mu \geq 1, |v| \leq 1, 0 \leq \phi \leq 2\pi$) y

$d > 0$ es una constante. Además, $\mathbf{A} = (0, 0, d)$ y $\mathbf{B} = (0, 0, -d) = -\mathbf{A}$. Calcule (a) la distancia entre punto \mathbf{r} y el punto \mathbf{A} (r_A), (b) la distancia entre el punto \mathbf{r} y el punto \mathbf{B} (r_B), (c) $r_A + r_B$ y (d) $r_A - r_B$.

8. Use las ecuaciones del ejercicio 7 y tome $y = 0$. (a) Si se elige $\mu = \text{const.}$, identifique la figura geométrica que le corresponde a los puntos en el plano X-Z. (b) Repita el procedimiento anterior tomando ahora $v = \text{const.}$

9. Calcule los números complejos siguientes: (a) $w \equiv (x+iy)(u+iv)$, (b) $(1+i)^3$, (c) $e^{\pi i/2}$, (d) w^* , (e) $|w|$.

10. Para la función $g(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy$, calcule (a) $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$ y (b) $\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$. (c)

Compare las funciones obtenidas.

11. Tome la función $h(x) = x^2 + 2x + 1$. Evalúe (a) $\frac{d}{dx}[xh(x)]$, (b) $x\left[\frac{d}{dx}h(x)\right]$. (c)

Reste las funciones obtenidas.

12. Para toda función $f(x)$, calcule (a) $\frac{d}{dx}[xf]$, (b) $x\left[\frac{d}{dx}f\right]$, (c) $\frac{d}{dx}[xf] - x\frac{d}{dx}[f]$.

13. Calcule la segunda derivada de la función Ae^{-ax} . Compare el resultado con la función original.

14. Evalúe $\nabla^2(\cos ax \cos by \cos cz)$. Compare el resultado con la función original.

15. Sea $G(q) = Ae^{-aq^2}$. (a) Calcule $H(q) \equiv \frac{d^2 G}{dq^2} - kq^2 G = \left(\frac{d^2}{dq^2} - kq^2\right)G$. (b) Identifique

la condición necesaria sobre el parámetro a para que la función H sea proporcional a la función G .

16. Identifique la paridad de las funciones siguientes: $\sin x, \cos x, 1, x, x^2, x^3$.

17. Identifique la paridad de las funciones siguientes: $\sin x \cos x, e^{x^2}, e^x, e^x - e^{-x}$.

18. Verifique que la función $F(x) = 4\sin(3x)$ es solución de la ecuación diferencial $F'' + 9F = 0$.

19. Resuelva la ecuación diferencial $du/dx + xu = 0$.

20. Obtenga la solución general de la ecuación diferencial $y'' + y = 0$, mediante el método de series de potencias.

21. Calcule la serie de Taylor, alrededor de $x = 0$ y hasta tercer orden, de las funciones siguientes: (a) $f_1(x) = e^x$, (b) $f_2(x) = \cos x$ y $f_3(x) = \ln(1+x)$.

Soluciones

Compare sus respuestas con las soluciones de los ejercicios que se presentan a continuación.

2) -160 .

3) $X = 30, Y = 1024$.

5) (a) $5\mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, (b) $3\mathbf{i}+4\mathbf{j}+4\mathbf{k}$, (c) -2 , (d) $8\mathbf{i}+7\mathbf{j}-13\mathbf{k}$.

6) $L_1=r_2p_3-r_3p_2$, $L_2=r_3p_1-r_1p_3$, $L_3=r_1p_2-r_2p_1$.

7) (c) $2d\mu$, (d) $-2dv$.

8) (a) hipérbola: $(z/a)^2 - (x/b)^2 = 1$, (b) elipse: $(x/f)^2 + (z/g)^2 = 1$.

9) (a) $xu - yv + (yu + xv)i$, (b) $-2 + 2i$, (c) i , (d) $xu - yv - (yu + xv)i$,

(e) $(x^2 + y^2)^{1/2} (u^2 + v^2)^{1/2}$.

10) (a) 2, (b) 2.

11) (a) $3x^2 + 4x + 1$, (b) $2x^2 + 2x$, (c) $x^2 + 2x + 1$.

12) (c) f .

13) $a^2 A e^{-ax}$.

14) $-(a^2 + b^2 + c^2) \cos ax \cos by \cos cz$.

15) (a) $Ae^{-aq^2} [-2a + q^2(4a^2 - k)]$, (b) $a = \frac{1}{2} \sqrt{k}$.

16) impar, par, par, impar, par, impar.

17) impar, par, sin paridad., impar.

19) $u(x) = A \exp(-x^2/2)$.

20) $y(x) = A \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^m}{(2m)!} + Bx \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^m}{(2m+1)!}$.

21) (a) $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots$, (b) $1 - \frac{1}{2}x^2 + \dots$, (c) $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots$.