Fisicoquímica general – estructura atómica **Versión – 22I**

ANDRÉS CEDILLO, *Dept. Química, UAM-Iztapalapa.*

Ejercicios de práctica.

1. En tres dimensiones, las coordenadas cartesianas de un vector (x,y,z) están relacionadas con sus coordenadas esféricas (r,θ,ϕ) a través de las ecuaciones siguientes: $x=r\sin\theta\cos\phi$, $y=r\sin\theta\sin\phi$, $z=r\cos\theta$. Demuestre que $r^2=x^2+y^2+z^2$.

2. Calcule el determinante siguiente $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

3. Si $a_i=2^i$ representa a algunos números enteros, evalúe $X=\sum_{i=1}^{4}a_i$ y $Y=\prod_{i=1}^{4}a_i$.

4. Para los vectores $\mathbf{A}=A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k}$ y $\mathbf{B}=B_x\mathbf{i}+B_y\mathbf{j}+B_z\mathbf{k}$, en donde **i**, **j** y **k** son los vectores unitarios en la dirección de los ejes cartesianos, verifique que $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$.

5. Si $\mathbf{A}=4\mathbf{i}+\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ y $\mathbf{B}=\mathbf{i}-3\mathbf{j}-\mathbf{k}$, calcule las expresiones siguientes: (a) $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, (b) $\mathbf{A}-\mathbf{B}$, (c) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ y (d) $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$.

6. El momento angular (**L**) es un vector definido como $\mathbf{L}\equiv\mathbf{r}\times\mathbf{p}$, en donde **r** es el vector de posición, **p** es el vector del momento lineal. Obtenga las componentes cartesianas del momento angular.

7. Sean $x=d\sqrt{\mu^2-1}\sqrt{1-\nu^2}\cos\phi$, $y=d\sqrt{\mu^2-1}\sqrt{1-\nu^2}\sin\phi$, $z=d\mu\nu$, las componentes del vector **r** en coordenadas elípticas $\left(\mu\geq 1,\left|\nu\right|\leq 1, 0\leq\phi\leq 2\pi\right)$ y $d>0$ es una constante. Además, $\mathbf{A}=(0,0,d)$ y $\mathbf{B}=(0,0,-d)=-\mathbf{A}$. Calcule (a) la distancia entre punto **r** y el punto **A** (r_A), (b) la distancia entre el punto **r** y el punto **B** (r_B), (c) r_A+r_B y (d) r_A-r_B.

8. Use las ecuaciones del ejercicio 7 y tome $y=0$. (a) Si se elige $\mu = \text{const.}$, identifique la figura geométrica que le corresponde a los puntos en el plano *X*-*Z*. (b) Repita el procedimiento anterior tomando ahora $\nu = \text{const.}$

9. Calcule los números complejos siguientes: (a) $w \equiv (x+iy)(u+iv)$, (b) $(1+i)^3$, (c) $e^{\pi i/2}$, (d) w^*, (e) $|w|$.

10. Para la función $g(x,y)=x^2+y^2+2xy$, calcule (a) $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}$ y (b) $\dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$. (c) Compare las funciones obtenidas.

11. Tome la función $h(x)=x^2+2x+1$. Evalúe (a) $\frac{d}{dx}\left[xh(x)\right]$, (b) $x\left[\frac{d}{dx}h(x)\right]$. (c) Reste las funciones obtenidas.

12. Para toda función $f(x)$, calcule (a) $\frac{d}{dx}\left[xf\right]$, (b) $x\left[\frac{d}{dx}f\right]$, (c) $\frac{d}{dx}\left[xf\right]-x\frac{d}{dx}\left[f\right]$.

13. Calcule la segunda derivada de la función Ae^{-ax}. Compare el resultado con la función original.

14. Evalúe $\nabla^2(\cos ax \cos by \cos cz)$. Compare el resultado con la función original.

15. Sea $G(q)=Ae^{-aq^2}$. (a) Calcule $H(q) \equiv \dfrac{d^2G}{dq^2} - kq^2G = \left(\dfrac{d^2}{dq^2} - kq^2\right)G$. (b) Identifique la condición necesaria sobre el parámetro *a* para que la función *H* sea proporcional a la función *G*.

16. Identifique la paridad de las funciones siguientes: $\sin x, \cos x, 1, x, x^2, x^3$.

17. Identifique la paridad de las funciones siguientes: $\sin x \cos x, e^{x^2}, e^x, e^x - e^{-x}$.

18. Verifique que la función $F(x)=4\sin(3x)$ es solución de la ecuación diferencial $F''+9F=0$.

19. Resuelva la ecuación diferencial $du/dx + xu = 0$.

20. Obtenga la solución general de la ecuación diferencial $y''+y=0$, mediante el método de series de potencias.

21. Calcule la serie de Taylor, alrededor de x = 0 y hasta tercer orden, de las funciones siguientes: (a) $f_1(x)=e^x$, (b) $f_2(x)=\cos x$ y $f_3(x)=\ln(1+x)$.

Soluciones

Compare sus respuestas con las soluciones de los ejercicios que se presentan a continuación.

2) -160.

3) $X = 30$, $Y = 1024$.

5) (a) $5\mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, (b) $3\mathbf{i}+4\mathbf{j}+4\mathbf{k}$, (c) -2, (d) $8\mathbf{i}+7\mathbf{j}-13\mathbf{k}$.

6) $L_1 = r_2p_3 - r_3p_2$, $L_2 = r_3p_1 - r_1p_3$, $L_3 = r_1p_2 - r_2p_1$.

7) (c) $2d\mu$, (d) $-2dv$.

8) (a) hipérbola: $(z/a)^2 - (x/b)^2 = 1$, (b) elipse: $(x/f)^2 + (z/g)^2 = 1$.

9) (a) $xu - yv + (yu + xv)i$, (b) $-2 + 2i$, (c) i, (d) $xu - yv - (yu + xv)i$,

(e) $(x^2 + y^2)^{1/2}\ (u^2 + v^2)^{1/2}$.

10) (a) 2, (b) 2.

11) (a) $3x^2 + 4x + 1$, (b) $2x^2 + 2x$, (c) $x^2 + 2x + 1$.

12) (c) f.

13) $a^2\ A\ e^{-ax}$.

14) $-(a^2 + b^2 + c^2) \cos ax \cos by \cos cz$.

15) (a) $Ae^{-aq^2}\left[-2a + q^2\left(4a^2 - k\right)\right]$, (b) $a = ½\sqrt{k}$.

16) impar, par, par, impar, par, impar.

17) impar, par, sin paridad., impar.

19) $u(x) = A\exp\left(-x^2/2\right)$.

20) $y(x) = A\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(-x^2\right)^m}{(2m)!} + Bx\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(-x^2\right)^m}{(2m+1)!}$.

21) (a) $1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \cdots$, (b) $1 - \frac{1}{2}x^2 + \cdots$, (c) $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$.