

El principio de incertidumbre

El estado cuántico de un sistema está descrito por la función de onda $\psi(x)$, y su módulo cuadrado representa la densidad de probabilidad, $P(x)$. La distribución de momentos $P(p)$ es el módulo cuadrado de la proyección de la función de onda sobre una función propia del momento:

$$\Pi(p) = \left| \langle \varphi_p | \psi \rangle \right|^2 = \left| \int \varphi_p^*(x) \psi(x) dx \right|^2, \quad (1)$$

en donde

$$\varphi_p(x) = B \exp\left(i \frac{px}{\hbar}\right), \quad B = (2\pi\hbar)^{-1/2}. \quad (2)$$

La incertidumbre en la medición de la propiedad observable f puede definirse como la desviación estándar de los valores de la misma. Esta incertidumbre se puede calcular por medio de la ecuación siguiente,

$$\Delta f \equiv \left\langle \left(\hat{f} - \langle f \rangle \right)^2 \right\rangle^{1/2} = \left(\langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2 \right)^{1/2}, \quad (3)$$

en donde los promedios se evalúan con la función de onda que representa al sistema,

$$\langle A \rangle \equiv \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = \int \psi^*(x) (\hat{A} \psi(x)) dx. \quad (4)$$

En la medición simultánea de dos propiedades, f_1 y f_2 , el producto de sus desviaciones estándar cumple con la desigualdad,

$$\Delta f_1 \cdot \Delta f_2 \geq \frac{1}{2} \left| \langle i [\hat{f}_1, \hat{f}_2] \rangle \right|, \quad (5)$$

esto es, satisface una relación de incertidumbre. La demostración de la desigualdad anterior se presenta en el Apéndice.

En particular, para los operadores de posición y de momento se tiene que $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$, de aquí que el principio de incertidumbre para estas propiedades sea la siguiente,

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{1}{2} \hbar. \quad (6)$$

Funciones de onda gaussianas

Para ejemplificar esta relación de incertidumbre, se evaluarán las propiedades descritas anteriormente para una función de onda muy sencilla.

Considere a una función gaussiana, definida en la recta real,

$$f(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2d^2}\right), \quad (7)$$

en donde la constante d es positiva y está relacionada con el ancho de la distribución. La función de onda normalizada puede describirse como

$$\psi(x) = Af(x) = A \exp\left(-\frac{x^2}{2d^2}\right), \quad (8)$$

en donde la constante A está dada por la condición de normalización,

$$A = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right]^{-1/2}, \quad (9)$$

y para la función gaussiana toma la forma

$$A = \left[d\sqrt{\pi} \right]^{-1/2}, \quad (10)$$

en donde se ha usado el valor de la integral de una gaussiana, $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2) dt = \sqrt{\pi}$. Así, la densidad de probabilidad también es una distribución gaussiana,

$$P(x) = |\psi(x)|^2 = \frac{1}{d\sqrt{\pi}} e^{-(x/d)^2}. \quad (11)$$

Para describir las propiedades en el espacio del momento se requiere de la proyección de la función de onda sobre las funciones propias del operador \hat{p} ,

$$\langle \varphi_p | \psi \rangle = AB^* \langle e^{-ipx/\hbar} | f \rangle = AB^* \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2d^2} - \frac{ipx}{\hbar}\right) dx. \quad (12)$$

Esta integral se resuelve completando el cuadrado perfecto del exponente,

$$\begin{aligned} \langle \varphi_p | \psi \rangle &= AB^* \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{pd}{\hbar}\right)^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x - id^2 p/\hbar)^2}{2d^2}\right) dx \\ &= AB^* \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{pd}{\hbar}\right)^2\right) d\sqrt{2\pi} \end{aligned} \quad (13)$$

Por lo que la distribución de momentos toma la forma siguiente,

$$\Pi(p) = \left| \langle \varphi_p | \psi \rangle \right|^2 = \frac{d}{\hbar\sqrt{\pi}} \exp\left(-\left(\frac{p}{(\hbar/d)}\right)^2\right), \quad (14)$$

en donde, por comparación con la ecuación (11), se puede observar que el ancho de esta distribución es (\hbar/d) , esto es, el ancho de la distribución de momentos es inversamente proporcional al ancho de la densidad de probabilidad de la posición.

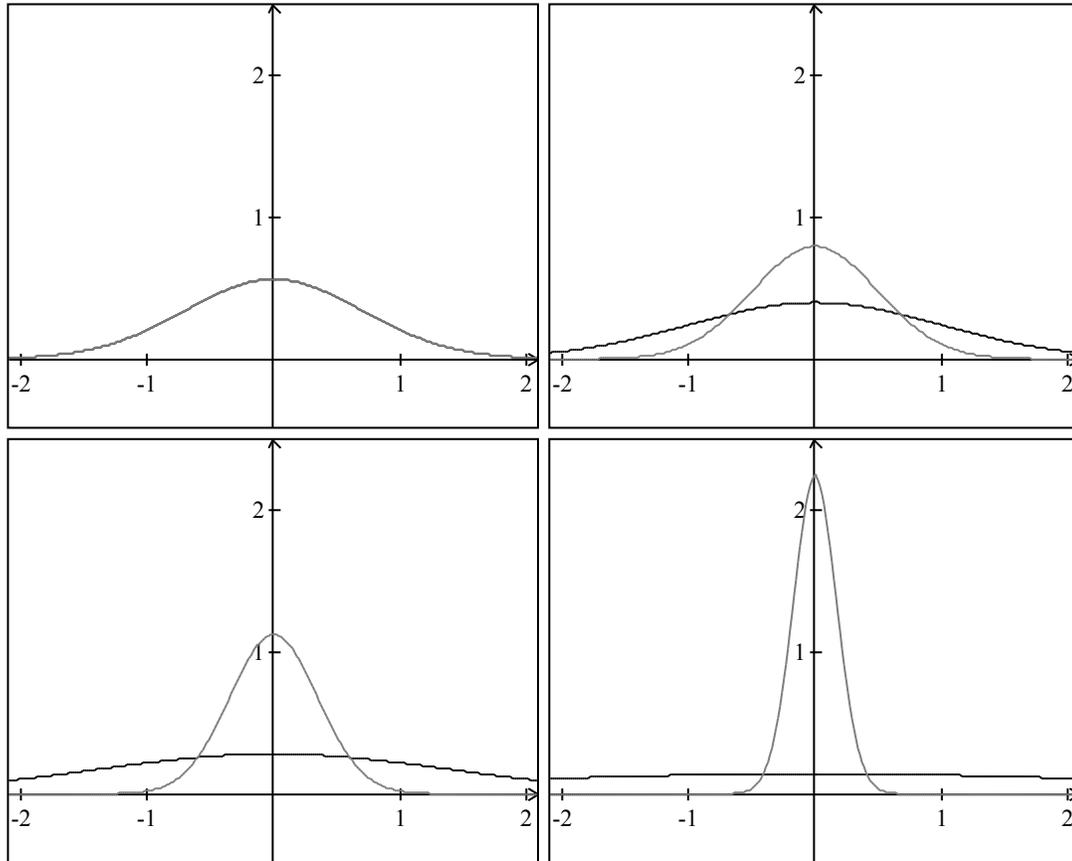


Figura 1. Densidades de probabilidad en el espacio de coordenadas, $P(x)$, en línea continua, y de momentos, $\Pi(p)$, en línea punteada, para una función de onda gaussiana.

En la Figura 1 se muestra la representación gráfica de P y Π para diferentes funciones gaussianas, $d = 1, \sqrt{2}, 2, 4$, y puede observarse la relación inversa en el ancho de las distribuciones. en el espacio de coordenadas y de momentos

Las incertidumbres en la posición y el momento se obtienen por integración directa,

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \frac{d}{\sqrt{2}} \quad , \quad \Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}d} \quad , \quad (15)$$

por lo que la relación de incertidumbre queda expresada como

$$\frac{\Delta x \cdot \Delta p}{\hbar} = \frac{1}{2} = 0.5 \quad . \quad (16)$$

Para gaussianas centradas fuera del origen, las incertidumbres y la distribución de momentos permanecen inalteradas, a diferencia de los valores esperados de potencias de la posición y de la densidad de probabilidad $P(x)$, los cuales presentan un desplazamiento horizontal.

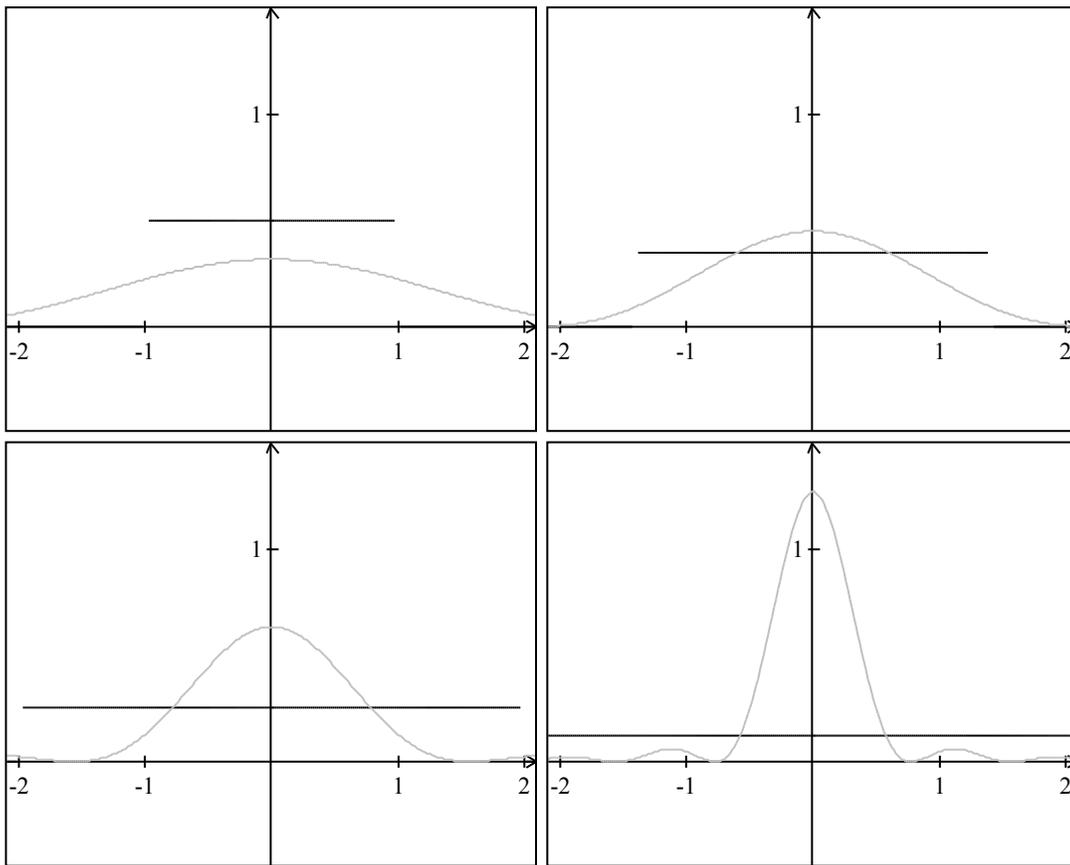


Figura 2. Densidades de probabilidad en el espacio de coordenadas y de momentos para una función de onda que es constante en el intervalo $[-d,d]$, para $d=1, \sqrt{2}, 2, 4$.

Otros tipos de funciones

Otro ejemplo sencillo consiste en tomar una función de onda que es constante en el intervalo $[-d,d]$ y cero fuera de él. En este caso, la constante de normalización toma el valor siguiente,

$$A = (2d)^{-1/2} , \quad (17)$$

y la proyección sobre φ_p puede escribirse como

$$\langle \varphi_p | \psi \rangle = AB^* \int_{-d}^d \exp\left(-\frac{ipx}{\hbar}\right) dx = 2AB^* d \frac{\sin(kd)}{kd} , \quad (18)$$

en donde $p = \hbar k$. Las gráficas de las distribuciones, P y Π , se muestran en la Figura 2, en donde se observa nuevamente la relación inversa entre los anchos de ambas distribuciones.

El mismo comportamiento se obtiene para la función polinomial

$$\psi(x) = A \begin{cases} (x^2 - d^2)^n & , |x| < d \\ 0 & , |x| > d \end{cases} , \quad A = \sqrt{\frac{(4n+1)!}{(2n)!^2 (2d)^{4n+1}}} . \quad (19)$$

En la Figura 3 se puede observar que al aumentar el valor de la potencia n , la densidad de probabilidad aumenta en el origen. Después de realizar las integrales necesarias, se obtienen los siguientes resultados para las incertidumbres:

$$\Delta x = \frac{d}{\sqrt{4n+3}} , \quad \Delta p = \frac{\hbar}{d} \sqrt{n \frac{4n+1}{4n-2}} . \quad (20)$$

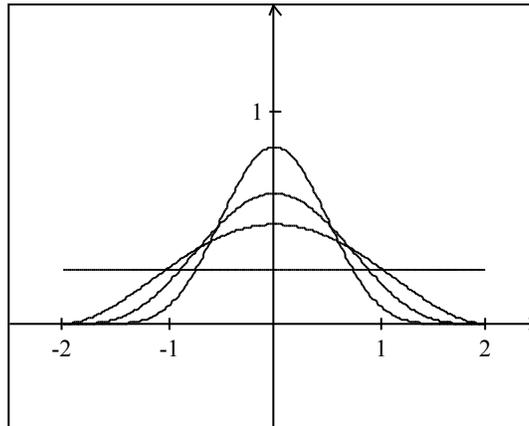


Figura 3. Densidad de probabilidad para las funciones polinomiales descritas por la ecuación (19), con $n=0, 1, 2, 4$ y $d=2$.

Así, la relación de incertidumbre toma la forma

$$\frac{\Delta x \cdot \Delta p}{\hbar} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n}{n-1/2} \frac{4n+1}{4n+3}} > \frac{1}{2} \quad (21)$$

la cual es consistente con la ecuación (6). La figura 4 muestra la dependencia del producto de incertidumbres, ecuación (21), con la potencia n . Se puede observar que producto tiende asintóticamente a $\hbar/2$.

Otros ejemplos se muestran en la Tabla 1 y en todos ellos se puede notar que la desigualdad de la ecuación (6) se satisface, aunque sólo para las funciones gaussianas se obtiene el valor mínimo en la relación de incertidumbre.

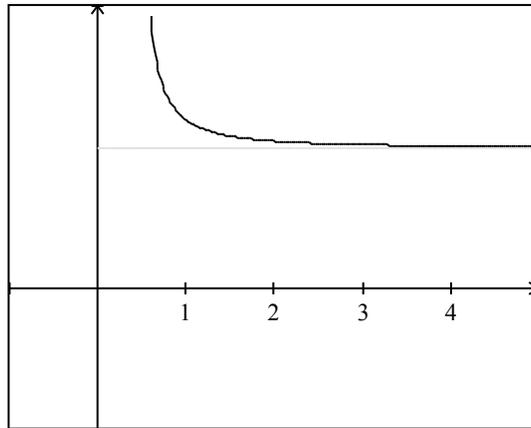


Figura 4. Relación de incertidumbre dada por la ecuación (21).

Tabla 1. Propiedades y relaciones de incertidumbre de algunas funciones de onda. La función $f(x)$ es una gaussiana de ancho d , ecuación (7).

$\psi(x)$	$A(x^2 - d^2)$	$A \cos\left(\frac{\pi}{2d}x\right)$	$A[f(x-a) - f(x+a)]$
A^{-2}	$\frac{16}{15}d^5$	d	$2\sqrt{\pi}d\left(1 - e^{-(a/d)^2}\right)$
$\langle e^{ikx} \psi \rangle$	$4A \frac{dk \cos(dk) - \sin(dk)}{k^3}$	$4A \frac{d\pi \cos(dk)}{\pi^2 - 4d^2k^2}$	$-2id\sqrt{2\pi} \sin(ka) e^{-\frac{1}{2}k^2d^2}$
$\frac{\Delta x \cdot \Delta p}{\hbar}$	$\sqrt{\frac{5}{14}} \approx 0.598$	$\sqrt{\frac{\pi^2 - 6}{12}} \approx 0.568$	$> \frac{3}{2}$

La primera función que se muestra en la Tabla 1 es un caso particular de la ecuación (19). La comparación entre las distribuciones en el espacio de coordenadas y de momentos se muestra en la Figura 5 y nuevamente se observa la relación inversa entre el ancho de una y otra.

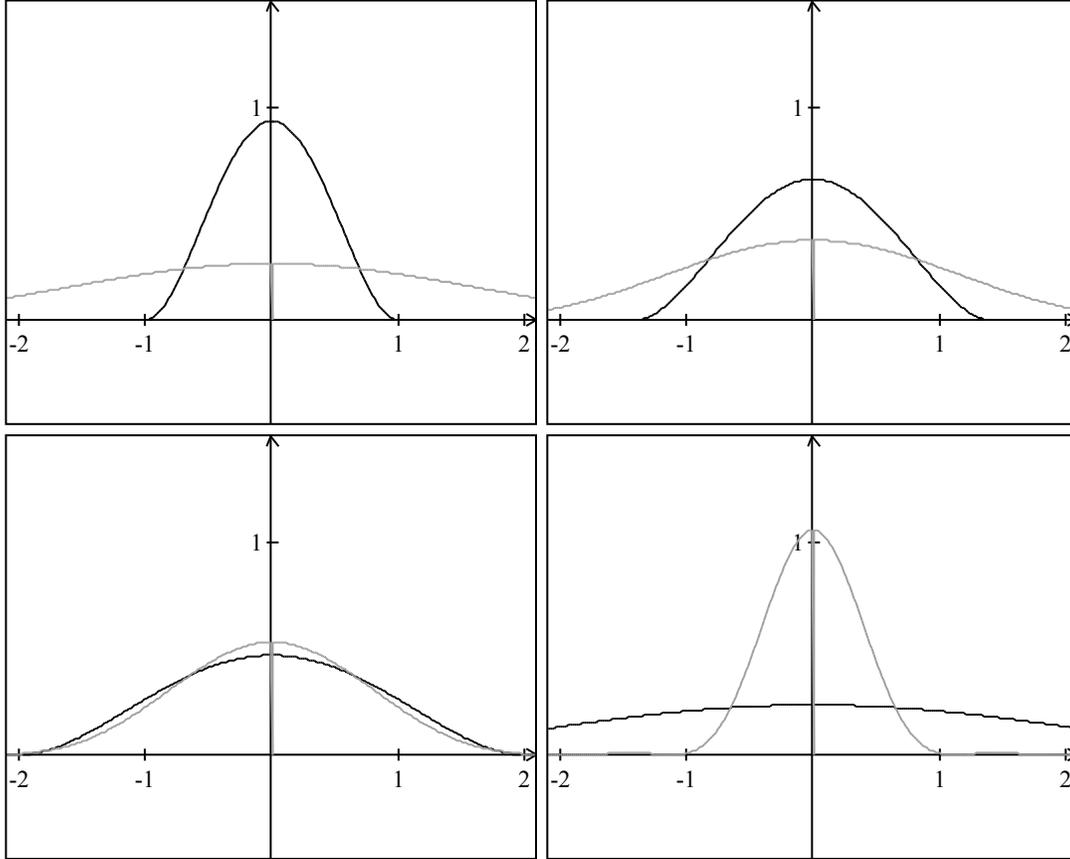


Figura 5. Distribución en el espacio de coordenadas y de momentos para una función cuadrática, definida en el intervalo $[-d,d]$, con $d=1, \sqrt{2}, 2, 4$.

Apéndice I. Demostración de la ecuación (5)

Considere al operador $\hat{G} \equiv \hat{A} + i\alpha\hat{B}$, en donde $\alpha \in \mathbf{R}$, y los operadores \hat{A}, \hat{B} son hermitianos. Así, $\langle \hat{G}\psi | \hat{G}\psi \rangle \geq 0$, por tanto,

$$\begin{aligned} \langle \psi | \hat{G}^\dagger \hat{G} \psi \rangle &= \langle \psi | \hat{A}^2 + \alpha i [\hat{A}, \hat{B}] + \alpha^2 \hat{B}^2 | \psi \rangle \\ &= \alpha^2 \langle B^2 \rangle + \alpha \langle i [\hat{A}, \hat{B}] \rangle + \langle A^2 \rangle \geq 0 \end{aligned} \quad (I.1)$$

y completando cuadrados, se tiene que

$$\langle B^2 \rangle \left(\alpha + \frac{\langle i[\hat{A}, \hat{B}] \rangle}{2\langle B^2 \rangle} \right)^2 + \langle A^2 \rangle - \frac{\langle i[\hat{A}, \hat{B}] \rangle^2}{4\langle B^2 \rangle} \geq 0 \quad . \quad (I.2)$$

Como el operador $i[\hat{A}, \hat{B}]$ es hermitiano, entonces su valor esperado, $\langle i[\hat{A}, \hat{B}] \rangle$, es real.

Así, el valor de α se elige de tal forma que el primer término se anule y

$$\langle A^2 \rangle \langle B^2 \rangle \geq \frac{1}{4} \langle i[\hat{A}, \hat{B}] \rangle^2 \quad . \quad (I.3)$$

Como caso particular, considere $\hat{A} \equiv \hat{f}_1 - \langle f_1 \rangle$ y $\hat{B} \equiv \hat{f}_2 - \langle f_2 \rangle$, entonces $[\hat{A}, \hat{B}] = [\hat{f}_1, \hat{f}_2]$, por lo que la ecuación anterior toma la forma que se desea demostrar,

$$\Delta f_1 \cdot \Delta f_2 \geq \frac{1}{2} \left| \langle i[\hat{f}_1, \hat{f}_2] \rangle \right| \quad . \quad (I.4)$$

Actividades adicionales

1. Obtenga \hat{G}^\dagger y demuestre que $\hat{G}^\dagger \hat{G} = \hat{A}^2 + \alpha i[\hat{A}, \hat{B}] + \alpha^2 \hat{B}^2$.
2. Demuestre que $i[\hat{A}, \hat{B}]$ es hermitiano.
3. Demuestre que $\langle A \rangle$ es real si \hat{A} es hermitiano.

Versión modificada en abril 2020