Universidad Autónoma Metropolitana - Iztapalapa

División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Problemario para el curso

Métodos Matemáticos para Fisicoquímica

Posgrado en Química

Febrero del 2006

1. Transformadas integrales

Transformada de Fourier

La transformada de Fourier de la función $f(t)$ está definida como

$$\mathbf{F}[f(t)] = \tilde{f}(\omega) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\, dt \, ,$$

mientras que la transformada inversa está dada por

$$f(t) = \mathbf{F}^{-1}[\tilde{f}(\omega)] \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega \, .$$

1. Sea $f(x) = Ae^{-\frac{1}{2}(x-x_o)^2}$,

   a) Determine A por la condición de normalización, $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx = 1$.

   b) Calcule $\tilde{f}(\omega)$.

   c) Determine $\int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{f}(\omega)|^2\, d\omega$.

   d) Considerando que $\langle x^n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n |f(x)|^2\, dx$, calcule $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$, $\Delta\omega = \sqrt{\langle \omega^2 \rangle - \langle \omega \rangle^2}$ y $\Delta x \Delta\omega$.

2. Demuestre las siguientes igualdades:

   a) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta''(t-a)\,dt = f''(a)$.

   b) $\int f(t)\delta^{(n)}(t-a)\,dt = (-1)^n f^{(n)}(a)$.

3. Para la función discontinua

$$\tilde{g}_{\Omega}(\omega) \equiv \begin{cases} 0 & \omega < -\Omega \\ 1 & -\Omega \le \omega \le \Omega \\ 0 & \omega > \Omega \end{cases}$$

   obtenga $g_{\Omega}(t)$.

4. La convolución de dos funciones se define como

$$[f * g](z) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z-x)dx .$$

Demuestre que la convolución es conmutativa, $f * g = g * f$.

5. Demuestre que $\boldsymbol{F}[f(t)g(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{f} * \tilde{g}$.

6. Obtenga la transformada de Fourier de la función $f(t) = e^{-|t|}$. A partir de la transformada inversa demuestre que

$$\frac{\pi}{2} e^{-|t|} = \int_{0}^{+\infty} \frac{\cos \omega t}{1+\omega^2} d\omega .$$

7. Para la ecuación diferencial

$$\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} - K^2\phi(x) = f(x),$$

demuestre que la solución puede escribirse como

$$\phi = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}\tilde{f}(k)}{k^2 + K^2} dk .$$

8. La correlación entre dos funciones se define como

$$[f \otimes g](z) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g(x+z)dx .$$

Demuestre que $[f \otimes g](z) = [g \otimes f]^*(-z)$.

9. Demuestre que $\tilde{c}(\omega) = \boldsymbol{F}[f \otimes g] = \sqrt{2\pi}\,[\tilde{f}(\omega)]^* \tilde{g}(\omega)$.

10. Demuestre que $\boldsymbol{F}[f^* g] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{f} \otimes \tilde{g}$.

11. Considere una función de $\boldsymbol{R}$ a $\boldsymbol{R}^2$, con simetría polar, $f(\mathbf{r}) = \Phi(\rho)$. Muestre que la transformada de Fourier puede escribirse de la forma $\tilde{f}(\vec{\omega}) = \int_0^{\infty} \Phi(\rho) J_0(\omega\rho)\rho d\rho$, en donde $J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x \sin\theta) d\theta$.

Transformada de Laplace

La transformada de Laplace de la función $f(t)$ se define como

$$\boldsymbol{L}[f(t)] = \bar{f}(s) \equiv \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt\,.$$

12. Demuestre que

$$\boldsymbol{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n \bar{f}(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)} - f^{(n-1)}(0)\,.$$

13. Si la convolución se define como $[f * g](t) \equiv \int_0^t f(u)g(t-u)\,du$. Demuestre que

$$\boldsymbol{L}[f * g] = \bar{f}(s)\bar{g}(s).$$

14. a) Sea $I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x^2}\,dx$, integre por partes para demostrar que $I_n = \dfrac{n-1}{2} I_{n-2}$.

b) Con el cambio de variable $u^2 = st$, muestre que: $\boldsymbol{L}\left[t^{1/2}\right] = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{s^3}\right)^{1/2}$ y

$$\boldsymbol{L}\left[t^{-1/2}\right] = \left(\frac{\pi}{s}\right)^{1/2}$$

15. Considere la ecuación diferencial $\dfrac{d^4 y}{dx^4} - y = f(x)$, con las condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$. Demuestre que

a) $$\bar{y}(s) = \int_0^\infty f(u)\,\frac{e^{-su}}{s^4 - 1}\,du\,,$$

b) $$y(x) = \frac{1}{2}\int_0^x f(u)\left[\sinh(x-u) - \sin(x-u)\right]du\,.$$

15. Demuestre que $\boldsymbol{L}\left[tf(t)\right] = -\dfrac{d\bar{f}(s)}{ds}$

2. Ecuaciones diferenciales ordinarias

Ecuaciones diferenciales lineales

1 Demuestre que si dos funciones son linealmente dependientes, entonces deben ser proporcionales. Utilice únicamente el Wronskiano.

2. Utilice la transformada de Laplace para resolver la ecuación diferencial $y'' - 2y' + y = e^x$, con las condiciones iniciales $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$.

3. Resuelva el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} - 2y &= -\sin t \\ \frac{dy}{dt} + 2x &= 5\cos t \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} x(0) &= 3 \\ y(0) &= 2 \end{aligned}.$$

4. Sean $e^t \equiv \alpha x + \beta$ y $D \equiv \dfrac{d}{dt}$. Demuestre que $\dfrac{d^3}{dx^3} = \left(\dfrac{\alpha}{\alpha x + \beta}\right)^3 D(D-1)(D-2)$.

5. Con $e^t \equiv \alpha x + \beta$ y $D \equiv \dfrac{d}{dt}$, muestre que la ecuación diferencial de tipo Legendre

$$(\alpha x + \beta)^n a_n \frac{d^n y}{dx^n} + \cdots + (\alpha x + \beta) a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y(x) = f(x)$$

se reduce a una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes,

$$a_n \alpha^n D(D-1)\cdots(D-(n-1))y + \cdots + a_1 \alpha D y + a_0 y = f\left(\frac{e^t - \beta}{\alpha}\right),$$

en donde a_0, a_1,..., a_n son constantes.

6. Transforme la ecuación diferencial $(x+1)^2 \dfrac{d^2 y}{dx^2} + 3(x+1)\dfrac{dy}{dx} + y = 0$, en una ecuación de coeficientes constantes y obtenga su solución.

7. Reduzca y resuelva la ecuación diferencial exacta $x^2 y'' + 2(x + x^3) y' + 6x^2 y = 12x^2$.

8. Considere la ecuación diferencial $y'' - y = x$ y sea $u(x)$ una solución de la ecuación complementaria. Reduzca la ecuación diferencial a una de primer grado, mediante el cambio de variable $y = uv$, y obtenga la solución general.

9. Para la ecuación diferencial no homogénea $\hat{L}y = f$, escriba a la solución particular en la forma siguiente

$$y_p = k_1(x)y_1(x) + ... + k_n(x)y_n(x) = \sum_{m=1}^{n} k_m y_m ,$$

en donde las funciones y_m son las soluciones linealmente independientes de la ecuación complementaria, $\hat{L}y_m = 0$. Demuestre que al aplicar el operador diferencial lineal $\hat{L} = \sum_{l=0}^{n} a_l(x)D^l$, sobre la solución particular se obtiene

$$\begin{aligned}\hat{L}y_p &= \sum_{m=1}^{n} k_m\left(\hat{L}y_m\right) + a_1\sum_{m=1}^{n} k'_m y_m + \sum_{l=2}^{n} a_l \sum_{j=1}^{l} C_j^l \sum_{m=1}^{n}\left(D^j k_m\right)\left(D^{l-j} y_m\right) \\ &= a_1\sum_{m=1}^{n} k'_m y_m + \sum_{l=2}^{n} a_l \sum_{j=1}^{l} C_j^l \sum_{m=1}^{n}\left(D^j k_m\right)\left(D^{l-j} y_m\right)\end{aligned}.$$

Ayuda: recuerde que $D^{(i)}(uv) = \sum_{k=0}^{i} C_k^i \left(D^k u\right)\left(D^{i-k} v\right)$, con $C_k^i = \dfrac{i!}{k!(i-k)!}$.

10. Demuestre que $\sum_{j=1}^{l-q-1} C_j^{l-q-1}\left(D^j k_m\right)\left(D^{l-j} y_m\right) = \sum_{j=1}^{l-q} C_j^{l-q}\left(D^j k_m\right)\left(D^{l-j} y_m\right) - D^{(l-q-1)}\left(k'_m y_m^{(q)}\right)$, y que del problema anterior se tiene

$$\hat{L}y_p = a_1\sum_{m=1}^{n} k'_m y_m + \sum_{l=2}^{n} a_l\left[D^{l-1}\sum_{m=1}^{n} k'_m y_m + \sum_{j=1}^{l-1} C_j^{l-1}\sum_{m=1}^{n}\left(D^j k_m\right)\left(D^{l-j} y_m\right)\right].$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\hat{L}y_p &= \sum_{l=1}^{n} a_l D^{l-1}\sum_{m=1}^{n} k'_m y_m + a_2\sum_{m=1}^{n} k'_m y'_m + \sum_{l=3}^{n} a_l \sum_{j=1}^{l-1} C_j^{l-1}\sum_{m=1}^{n}\left(D^j k_m\right)\left(D^{l-j} y_m\right) \\ &= \sum_{l=1}^{n} a_l D^{l-1}\sum_{m=1}^{n} k'_m y_m + \sum_{l=2}^{n} a_l D^{l-2}\sum_{m=1}^{n} k'_m y'_m + a_3\sum_{m=1}^{n} k'_m y''_m \\ &\quad + \sum_{l=4}^{n} a_l \sum_{j=1}^{l-2} C_j^{l-2}\sum_{m=1}^{n}\left(D^j k_m\right)\left(D^{l-j} y_m\right)\end{aligned}.$$

11. Utilice el método de variación de parámetros para resolver la ecuación diferencial

$$y'' - 2y' + y = 2xe^x .$$

Función de Green

12. Resuelva la ecuación diferencial $y'' + y = \sin 2x$, con las condiciones de frontera $y(0) = y(\pi/2) = 0$, por el método de la función de Green.

13. Para $t \geq t_0$, se tiene la ecuación diferencial $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} + \alpha \dfrac{dx(t)}{dt} = f(t)$, con las condiciones iniciales $x(t_0) = x'(t_0) = 0$.
    a) Determine la función de Green, $G(t,t')$
    b) Obtenga la solución de la ecuación diferencial cuando $f(t) = Ae^{-at}$

Otros métodos

14. Con el cambio de variable $y = uv$, reduzca la ecuación diferencial de segundo orden $y'' + b_1(x)y' + b_o(x)y = f(x)$ a su forma canónica, $v'' + g(x)v = h(x)$. Obtenga la forma explícita de las funciones u, g y h.

15. Resuelva la ecuación diferencial de segundo orden $x^2y'' + xy' = x^{\frac{5}{2}}$ reduciéndola a su forma canónica.

16. Para el cambio de variable $p(y) = \dfrac{dy}{dx}$, demuestre que $\dfrac{d^3y}{dx^3} = p\left[\left(\dfrac{dp}{dy}\right)^2 + p\dfrac{d^2p}{dy^2}\right]$.

17. Escriba la ecuación diferencial $2yy''' + 2(y+3y')y'' + 2(y')^2 = \sin x$ como una ecuación exacta y muestre que su solución está dada por

$$y^2 = \frac{1}{2}(\cos x - \sin x) + C_1e^{-x} + C_2x + C_3.$$

3. Soluciones en series

Puntos ordinarios y singulares

1. Partiendo de la ecuación de segundo orden $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, muestre que el cambio de variable $w = \frac{1}{x}$ transforma la ecuación diferencial en

$$w^4 \frac{d^2y}{dw^2} + \left[2w^3 - w^2 p\left(w^{-1}\right)\right]\frac{dy}{dw} + q\left(w^{-1}\right)y = 0$$

Para la ecuación de Legendre, indique que tipo de punto es w=0.

2. Obtenga los puntos singulares regulares y esenciales de las ecuaciones siguientes
   a) Chebyshev: $\left(1 - x^2\right)y'' - xy' + n^2 y = 0$,
   b) Bessel: $x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \nu^2\right)y = 0$,
   c) Laguerre: $xy'' + (1 - x)y' + \alpha\, y = 0$,
   d) Hermite: $y'' - 2xy' + 2\alpha\, y = 0$,
   e) Movimiento armónico simple: $y'' + w^2 y = 0$.

3. Si $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, muestre que:
   a) $D^\alpha y = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+\alpha} (k+\alpha)(k+\alpha-1)\cdots(k+1)\, x^k$,
   b) $x^\beta y = \sum_{k=\beta}^{\infty} a_{k-\beta} x^k$,
   c) $x^\beta D^\alpha y = \sum_{k=\beta}^{\infty} a_{k+\alpha-\beta} (k+\alpha-\beta)(k+\alpha-\beta-1)\cdots(k-\beta+1)\, x^k$.

4. Para la ecuación diferencial $y'' - \frac{2}{(1-x)^2}\, y = 0$,
   a) Muestre que la solución en series satisface

$$0 = 2(a_2 - a_0) + 2x(3a_3 - 2a_2 - a_1) + \sum_{n=2}^{\infty}(n+1)\left[(n+2)a_{n+2} - 2na_{n+1} + (n-2)a_n\right]x^n$$

   b) Para $a_0 = 1$ y $a_1 = 0$, calcule $a_2, \ldots, a_6, \ldots, a_n$ y obtenga $y_1 = 1 + x^2 + \frac{2}{3}\sum_{n=3}^{\infty} x^n$.
   c) Para $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$, calcule $a_2, \ldots, a_6, \ldots, a_n$ y obtenga $y_2 = x + \frac{1}{3}\sum_{n=3}^{\infty} x^n$.

5. Resuelva la ecuación tipo Legendre $(1-x)^2 y'' - 2y = 0$ e identifique sus soluciones con las del problema 4.

Método de Frobenius

6. Para la serie de Frobenius, calcule
   a) $D^{\alpha} y$,
   b) $x^{\beta} y$,
   c) $x^{\beta} D^{\alpha} y$.

7. Demuestre que los coeficientes de las soluciones en series de la ecuación diferencial $4xy'' + 2y' + y = 0$, tienen la forma siguiente:
   a) y_1: $a_n = \dfrac{(-1)^n a_0}{(2n+1)!}$,
   b) y_2: $b_n = \dfrac{(-1)^n b_0}{(2n)!}$.

8. Transforme la ecuación diferencial $4xy'' + 2y' + y = 0$, haciendo el cambio de variable: $u = \sqrt{x}$. Verifique que las soluciones coinciden con las del problema 7.

9. Sea la ecuación diferencial $4xy'' + 2(1-x)y' - y = 0$.
   a) Resuelva por el método de Frobenius, alrededor de x_0=0 y obtenga las dos soluciones linealmente independientes.
   b) Muestre que $e^{x/2}$ es solución de la ecuación diferencial e identifique esta solución los resultados del inciso a.

10. Obtenga la solución de la ecuación diferencial $x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0$ en forma de serie de Frobenius, alrededor del punto x_0=0. Demuestre que, para s=1, los coeficientes de la serie satisfacen $a_n = a_0(n+1)$, mientras que para la otra raíz se tiene una inconsistencia.

11. Resuelva la ecuación $x^2 y'' - \dfrac{3}{2} xy' + (1+x)y = 0$ por el método de Frobenius, alrededor de x_0=0. Obtenga las dos soluciones.

Métodos para obtener la segunda solución

12. Para la ecuación diferencial $xy'' - 2y' + xy = 0$:
    a) Obtenga las dos soluciones en series por el método de Frobenius.
    b) Demuestre que $f_1 = 3(\sin x - x\cos x)$ es solución de la ecuación diferencial.
    c) Obtenga la segunda solución con el método del wronskiano.

    Ayuda: Para la integración del inciso c, escriba: $x^2 = \dfrac{x}{\sin x} x\sin x$ e integre por partes. $\left(f_2(x) = \cos x + x\sin x\right)$

13. Sea la ecuación $y'' - 2xy' - 2y = 0$
    a) Resuelva por el método de Frobenius alrededor de x=0.
    b) Demuestre que e^{x^2} es solución.
    c) Utilice el método de la segunda solución para demostrar que

    $$\int_0^x e^{-x^2} dx = e^{x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\,(2x)^{2n+1}}{2(2n+1)!}$$

14. Para la ecuación $x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0$,
    a) Encuentre y_1 por el método de Frobenius.
    b) Obtenga la segunda solución utilizando el método de la derivada.

15. Transforme la ecuación diferencial $\dfrac{d^2 y}{dz^2} + \dfrac{y}{z^3} = 0$ con el cambio de variable $x = \dfrac{1}{z}$. Encuentre sus soluciones en series, alrededor de x=0.

Soluciones polinomiales

16. Sea la ecuación diferencial $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$,
    a) Demuestre que se obtiene la siguiente relación de recurrencia $a_{n+2} = \dfrac{2n - \lambda}{(n+1)(n+2)} a_n$, y obtenga las dos soluciones linealmente independientes.
    b) Encuentre la solución polinomial para $\lambda = 4$ y $\lambda = 6$.

17. De la ecuación diferencial de Legendre, $(1 - x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0$, muestre que $a_{n+2} = \dfrac{(n+l+1)(n-l)}{(n+2)(n+1)} a_n$ y obtenga las dos soluciones en series.

18. Demuestre que los primeros polinomios de Legendre son

$$P_o(x)=1,\quad P_1(x)=x,\quad P_2(x)=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right),\quad P_3(x)=\frac{1}{2}\left(5x^3-3x\right)$$

19. De la ecuación de Legendre $\left(1-x^2\right)y''-2xy'+l(l+1)y=0$,

a) Muestre que el wronskiano está dado por $W=\dfrac{1}{1-x^2}$

b) A partir de las soluciones polinomiales P_0 y P_1 obtenga $Q_0=\dfrac{1}{2}\,ln\,\dfrac{1+x}{1-x}$ y $Q_1=\dfrac{1}{2}\,x\,ln\,\dfrac{1+x}{1-x}-1$, utilizando el método de la segunda solución.

20. Evalúe $D^{l+1}\left[\left(x^2-1\right)u'\right]$ y $D^{l+1}[2lxu]$.

a) Utilice los resultados anteriores para demostrar que $\left(1-x^2\right)u^{(l)''}-2xu^{(l)'}+l(l+1)u^{(l)}=0$.

b) Partiendo de la fórmula de Rodrigues $\dfrac{d^l}{dx^l}\left(x^2-1\right)^l=c_lP_l$, demuestre que $D^l\left[(x+1)^l(x-1)^l\right]_{x=1}=c_l$, y que $c_l=l!\,2^l$.

c) Demuestre que la integrales $k_l\equiv\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^l dx$ satisfacen la relación de recurrencia $k_l=-2lk_{l-1}/(2l+1)$. Resuelva la relación para k_l.

21. La ecuación $\sum_{n=0}^{\infty}P_n'h^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(-2xP_n'\right)h^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}P_n'h^{n+2}=\sum_{n=0}^{\infty}P_nh^{n+1}$ se obtiene derivando la función generadora de los polinomios de Legendre con respecto a x.

a) Utilice la suma anterior para demostrar las ecuaciones siguientes $P_0'=0,\quad P_1'-2xP_o'=P_0,\quad P_n'-2xP_{n-1}'+P_{n-2}'=P_{n-1}$, para $n\geq 2$.

b) Derive la función generadora con respecto a h, y demuestre que

$$\frac{\partial G}{\partial h}=-(h-x)G^3\ ,\quad -(h-x)\sum_{n=0}^{\infty}P_n'h^n=\sum_{n=1}^{\infty}nP_nh^n.$$

c) Utilice los resultados anteriores para mostrar que

$$xP_0'=0$$

$$xP_n'-P_{n-1}'=nP_n\qquad (n\geq 1)$$

22. a) Utilizando los resultados del problema 21, demuestre que

$$\frac{\partial G}{\partial h} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P_1 - xP_0 = 0 \\ 2P_2 - 3xP_1 + P_0 = 0 \\ (n+1)P_{n+1} - (2n+1)xP_n + nP_{n-1} = 0\,, \quad n \geq 2 \end{cases} .$$

b) Muestre que $P_0 = cte,\ P_1 = xP_0,\ P_2 = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right)P_0$ y obtenga P_3, P_4, P_5.

23. Considere el siguiente arreglo de cargas puntuales, $2q$ en el origen, $-q$ en (0, 0, a) y $-q$ en (0, 0, $-a$). Use la función generadora para mostrar que el potencial electrostático, para $r > a$, está dado por

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{2q}{(4\pi\varepsilon_o)r}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{2m} P_{2m}(\cos\theta)$$

24. De la ecuación diferencial de Chebyshev, $\left(1 - x^2\right)y'' - xy' + m^2 y = 0$,

a) Obtenga la ecuación indicial $(s = 0, 1)$ y las soluciones para la relación de recurrencia.

b) Obtenga las soluciones polinomiales y las soluciones en series.

25. Los polinomios de Hermite, H_n, pueden definirse a partir de su función generadora,

$$G(x,h) \equiv e^{2xh - h^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} H_n(x) h^n .$$

a) Demuestre que $\dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} - 2x\dfrac{\partial G}{\partial x} + 2h\dfrac{\partial G}{\partial h} = 0$ y que, por tanto, H_n satisface $H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0$.

b) Calcule $\dfrac{\partial G}{\partial x}$ y muestre que $H_n' = 2nH_{n-1}$.

c) Muestre que $H_{n+1} - 2xH_n + 2nH_{n-1} = 0$, utilizando $\dfrac{\partial G}{\partial h}$.

d) Desarrolle a G en series de Taylor, alrededor de $h = 0$ y demuestre que

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} .$$

Funciones de Bessel

26. Considere la ecuación de Bessel, $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$, en donde $\nu \geq 0$ y x_0=0 es un punto singular.

a) Use el método de Frobenius y muestre que se obtienen las siguientes relaciones

$$a_0(s^2 - \nu^2) = 0$$
$$a_1(s + 1 + \nu)(s + 1 - \nu) = 0 \quad .$$
$$a_n(s + n + \nu)(s + n - \nu) + a_{n-2} = 0$$

b) Obtenga y_1 y y_2 para el caso en que ν no es un entero y muestre que

$$J_\nu = \frac{1}{2^\nu \Gamma\ (1+\nu)} y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2n}$$
$$J_{-\nu} = \frac{1}{2^{-\nu} \Gamma\ (1-\nu)} y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-\nu} .$$

27. A partir de $\Gamma(x) \equiv \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$,

a) Integre por partes para mostrar que $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$.

b) Demuestre que $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$.

28. Demuestre que

a) $J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\ sen\, x$,

b) $J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\ cos\, x$.

29. Demuestre que

a) $\frac{d}{dx}\left[x^\nu J_\nu(x)\right] = x^\nu J_{\nu-1}(x)$,

b) $\frac{d}{dx}\left[x^{-\nu} J_\nu(x)\right] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$,

c) $xJ'_\nu \pm \nu J_\nu = \pm x J_{\nu\mp1}$ (utilice los resultados anteriores).

30. Con las funciones $J_{1/2}$ y $J_{-1/2}$, calcule

a) $J_{3/2}$, $J_{-3/2}$,

b) $Y_{1/2}$, $Y_{3/2}$.

31. Demuestre que

a) $\dfrac{d}{dx}\left[x\left(GF' - FG'\right)\right] = \left(\lambda^2 - \mu^2\right)xFG$, en donde $F(x) = J_\nu(\mu x)$ y $G(x) = J_\nu(\lambda x)$.

b) $\displaystyle\int_a^b xJ_\nu(\mu x)^2\,dx = \frac{1}{2\mu^2}\left[\{uJ_\nu(u)\}^2 + \{uJ_\nu'(u)\}^2 - \{\nu J_\nu(u)\}^2\right]_{\mu a}^{\mu b}$.

32. Una funcion $f(x)$, definida en el intervalo $[0, b]$, puede desarrollarse en la forma $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n J_\nu(\lambda_n x)$, en donde las constantes λ_n satisfacen la condición $J_\nu(\lambda_n b) = 0$. Demuestre que $C_n = \dfrac{1}{\alpha_n}\displaystyle\int_0^b xJ_\nu(\lambda_n x)f(x)dx$, con $\alpha_n = \frac{1}{2}\{bJ_\nu'(\lambda_n b)\}^2 = \frac{1}{2}\{bJ_{\nu\pm1}(\lambda_n b)\}^2$.

33. Utilice la función generadora, $G(x,h) = \exp\left[\frac{1}{2}x\left(h - \frac{1}{h}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)h^n$, para mostrar que $xJ_n - 2(n-1)J_{n-1} + xJ_{n-2} = 0$ y $J_n + 2J_{n-1}' - J_{n-2} = 0$.

34. Sea $I_n(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \cos[x\sin\theta - n\theta]\,d\theta$.

a) Demuestre que $e^{ix\sin\theta} = G\left(x, e^{i\theta}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)[\cos nx + i\sin nx]$.

b) Encuentre expresiones para $\cos(x\sin\theta)$ y $\sin(x\sin\theta)$.

c) Demuestre que $I_n(x) = J_n(x)$.

4. Métodos de funciones propias

1. Sean $\rho(x) = 1$ y $| y_i \rangle = | x^i \rangle$, $i = 0,1,2,\ldots$

   a) Calcule los primeros cinco polinomios ortonormales, en el intervalo [-1,1], $| \varphi_0 \rangle, | \varphi_1 \rangle, | \varphi_2 \rangle, | \varphi_3 \rangle, | \varphi_4 \rangle$.

   b) Muestre que los polinomios $\{| \varphi_i \rangle\}$ son proporcionales a los polinomios de Legendre.

2. Transforme a la forma de Sturm-Liouville las ecuaciones de Bessel y de Laguerre. Establezca la propiedad de ortogonalidad de las soluciones.

3. De la ecuación hipergeométrica $(x^2 - x)y'' + [(1+\alpha+\beta)x - \gamma]y' + \alpha\beta y = 0$

   a) ¿Qué valores deben tomar α, β y γ para que la ecuación sea una ecuación de Sturm-Liouville?

   b) Si α, β y γ no cumplen las condiciones anteriores, transfórmela a una ecuación de Sturm-Liouville.

4. Muestre que:

   a) $$\int_0^1 P_{2n+1}(x)dx = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{n+1} n!\,(n+1)!} \qquad (n \geq 0)$$

   b) $$\int_0^1 P_{2n}(x)dx = 0 \qquad (n > 0)$$

   c) $$\int_0^1 P_0(x)dx = 1$$

   Sugerencia: Utilice $\int_0^1 G(x,h)dx$

5. a) Demuestre que la función $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ es la solución de la ecuación de Chebyshev.

   b) Utilice exponenciales imaginarias y el desarrollo binomial para demostrar que:

   $$T_n(x) = \sum_{\substack{k=0 \\ pares}}^{n} \frac{n!\,(-1)^{k/2} x^{n-k} (1-x^2)^{k/2}}{k!\,(n-k)!}$$

6. A partir del desarrollo en funciones propias de la función de Green, demuestre que

$$\sum_{m=0}^{\infty} y_m^*(z) y_m(x) \rho(x) = \delta(x-z)$$

7. Para el problema $y'' + y = f(x)$, con $y(0) = 0,\ y(\pi) = 0$, obtenga la función de Green y la solución para $f(x) = \sin 2x$.

8. a) Obtenga la solución de $(1-x^2)y'' - 2xy' + by = f(x)$, en el intervalo [-1,1], como una combinación de los polinomios de Legendre.

   b) Si b=14 y $f(x) = 5x^3$ demuestre que $y = \frac{1}{4} P_1 + P_3$.

9. Para la ecuación de Poisson, $\nabla^2 \phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} \rho(\vec{r})$, exprese la solución en términos de la función de Green y demuestre que $\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')$.

   Nota: Identifique la función de Green directamente de su ecuación diferencial.

5. Ecuaciones integrales

1. Resuelva las siguientes ecuaciones integrales:

   a) $$\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \frac{a}{a^2+s^2}$$

   b) $$\int_0^\infty \cos(uv)\,y(v)\,dv = e^{\frac{-u^2}{2}}$$, para $x>0$.

   Nota: Dado que y no está definida en $x<0$, suponga que $y(x)$ es una función par y exprese la ecuación integral como una transformada de Fourier.

2. Si $K(x,z)$ es el kernel integral del operador integral $\hat{K}$, demuestre que $K^*(z,x)$ es el kernel de $\hat{K}^\dagger$.

3. Para la ecuación integral $y(x) = x + \lambda\int_0^1 (xz+z^2)y(z)dz$, demuestre que:

   a) $$\vec{F} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/4 \end{bmatrix} \text{ y } \tilde{M} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 1/4 & 1/3 \end{pmatrix}$$

   b) $$\vec{C} = \begin{bmatrix} 24+\lambda \\ 18 \end{bmatrix}\frac{1}{72-48\lambda-\lambda^2}$$

   c) $$y(x) = 6\cdot\frac{4x(3-\lambda)+3\lambda}{72-48\lambda-\lambda^2}$$

4. Resuelva la ecuación integral $y(x) = x + \lambda\int_0^1 xz\cdot y(z)dz$

5. Demuestre que la ecuación integral $y(x) = \lambda\int_0^\pi \sin(x+z)y(z)\,dz$ tiene las siguientes soluciones:

   $$\lambda_1 = \frac{2}{\pi} \qquad y_1(x) = c_1(\sin x + \cos x)$$

   $$\lambda_2 = -\frac{2}{\pi} \qquad y_2(x) = c_2(\sin x - \cos x)$$

6. Sea $y(x) = f(x) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \frac{sen(x-z)}{x-z} y(z)dz$.

a) Demuestre que la solución de la ecuación integral puede escribirse en la forma

$$y(x) = f(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\pi\lambda}{1-\pi\lambda} \int_{-1}^{1} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk \ .$$

b) Si $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ demuestre que $y(x) = \dfrac{1}{1-\pi\lambda} \cdot \dfrac{\sin x}{x}$.

7. Encuentre la solución de la ecuación integral $y(x) = e^{-x^2/2} + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixz} y(z)dz$ e investigue el comportamiento de la solución para aquellos valores de λ en los que se presenta una singularidad.

8. Convierta $f(x) = e^x + \int_0^x (x-y) f(y)dy$ en una ecuación diferencial de segundo orden y demuestre que $f(x) = (\alpha + \beta x)e^x + \gamma e^{-x}$, y determine α, β y γ.

9. Transforme la ecuación integral $f(x) = x + \frac{1}{2}\int_0^1 |x-y| f(y)dy$ en la ecuación diferencial ordinaria $f'' = f$ y resuelvala. $f(x) = \dfrac{2}{(e+3)(e+1)}\left[(e+2)e^x - e \cdot e^{-x}\right]$.

10. Para la ecuación integral $y(x) = \dfrac{1}{x^3} + \lambda \int_a^b x^2 z^2 y(z)dz$ muestre que:

a) $R(x,z;\lambda) = 5\left(\dfrac{x^2 z^2}{5 - \lambda(b^5 - a^5)}\right)$

b) Resuelva la ecuación integral.

c) Encuentre el intervalo de convergencia.

11. Encuentre el kernel resolvente del problema anterior utilizando la teoría de Fredholm.

12. a) Para el kernel $K(x,z)=(x+z)e^{x-z}$, en [0,1], utilice la teoría de Fredholm y muestre que su kernel resolvente es $R(x,z;\lambda)=e^{x-z}\dfrac{x+z-\lambda\left(\frac{x}{2}+\frac{z}{2}-xz-\frac{1}{3}\right)}{1-\lambda-\frac{\lambda^2}{12}}$.

b) Resuelva la ecuación integral $y(x)=x^2+2\int_0^1(x+z)e^{x-z}y(z)dz$ y exprese la solución en términos de las integrales $i_n=\int_0^1 u^n e^{-u}du$.

13. Para la ecuación integral $y(x)=\sin(x+\alpha)+\lambda\int_0^\pi \sin(x+z)\,y(z)\,dz$, demuestre que:

a) Las funciones propias del operador integral, $y_i=c_i(\sin x\pm\cos x)$, están normalizadas si $c_i=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

b) Los coeficientes del desarrollo de la solución del ecuación integral, $y=\sum_i a_i y_i$, están dados por $a_1=\sqrt{\pi}\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{2-\lambda\pi}$, $a_2=\sqrt{\pi}\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{2+\lambda\pi}$.

c) La solución puede escribirse de la forma

$$y(x)=\frac{4}{4-\lambda^2\pi^2}\left[\cos(x-\alpha)+\frac{\lambda\pi}{2}\sin(x+\alpha)\right]$$

14. a) Obtenga los valores propios y las funciones propias de la ecuación

$$f(x)=\lambda\int_0^1 xy(x+y)f(y)dy.$$

b) Resuelva la ecuación no homogénea $f(x)=\mu x^2+2\int_0^1 xy(x+y)f(y)dy$, usando el método de valores propios.

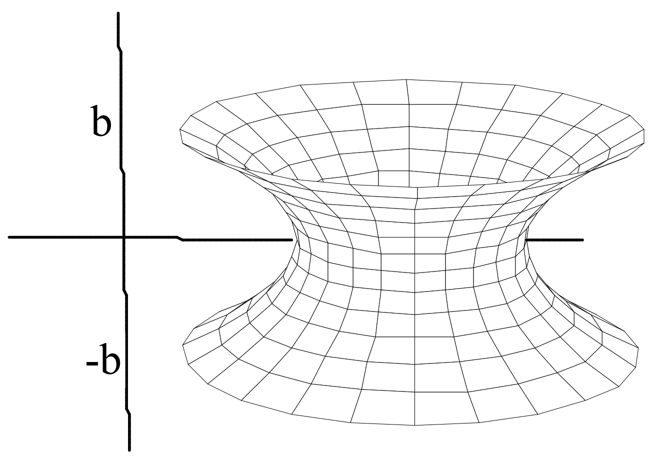
6. Cálculo variacional

1. a) Demuestre que la solución de la ecuación diferencial $y' = \frac{1}{c}\sqrt{c^2 - y^2}$, con $y(0) = 0$, $y\left(\frac{l}{2}\right) = 0$ es $y(s) = c \cdot \sin\frac{s}{c}$, en donde $c = \frac{l}{2\pi}$.

   b) Integre $\frac{dx}{ds} = \left[1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right]^{1/2}$ para obtener $x(s) = \frac{l}{2\pi}\left(1 - \cos\frac{2\pi s}{l}\right)$.

   c) Utilice los resultados anteriores para demostrar que la solución del inciso a satisface la ecuación $y^2 + \left(x - \frac{l}{2\pi}\right)^2 = \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2$.

2. Se forma una película de jabón entre dos anillos paralelos de radio a, separados por una distancia $2b$. Encuentre la forma del perfil de la película de jabón.



3. Para el funcional $I[y] = \int F(y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n', x)$, demuestre que la ecuación de Euler-Lagange toma la forma $\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right) = 0$.

4. Para el funcional $I[y] = \int F(y, \nabla y, \vec{r})d\vec{r}$, demuestre que $\frac{\partial F}{\partial y} - \nabla \cdot \frac{\partial F}{\partial \nabla y} = 0$.

5. Para el funcional $I[y] = \int F\left(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}, x\right)$, demuestre que la ecuación de Euler-Lagrange toma la forma $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left(\frac{d}{dx}\right)^i \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(i)}}\right) = 0$.

6. Encuentre la función extremal del funcional $v[y(x)] = \int_0^{\pi/2} \left(y'^2 - y^2\right) dx$, con $y(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

7. Encuentre la función extremal del funcional $v[y] = \int_0^1 \left[y'^2 + 12xy\right] dx$, con $y(0)=0$, $y(1)=1$.

8. Para el funcional $I[y] = \int_{-a}^{a} \rho g y \sqrt{1 + y'^2}\, dx$ con $y(a) = y(-a) = 0$, sujeto a la condición $J[y] = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + y'^2}\, dx - 2L = 0$, muestre que $y = \frac{a}{\beta}\left[\cosh\frac{\beta x}{a} - \cosh\beta\right]$ es la función minimal, en donde β satisface la ecuación $\sinh\beta = \frac{\beta\ \ L}{a}$.

9. Encuentre la función extremal del funcional $t[y] = \int_{x_0}^{x_1} y'^2 dx$ con la condición $J[y] = \int_{x_0}^{x_1} y dx = a$ y las condiciones de frontera $y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$. Obtenga el valor del multiplicador de Lagrange. Determine la solución explícita para el caso $x_0=0$, $y_0=y_1=0$, $x_1=1$.

10. Sea $I[y] = \int_a^b \left[p(x)y'(x)^2 - q(x)y(x)^2\right] dx$, con $y(a)=y(b)=0$ y la condición $J[y] = \int_a^b \rho(x)y(x)^2\, dx = \alpha$, en donde $\alpha \in \boldsymbol{R}$, $\rho(x)>0$ en $[a,b]$.
Demuestre que la función extremal satisface una ecuación de Sturm-Liouville $\hat{L}y = \lambda\rho y$ en donde $\hat{L} = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) - q(x)$.

11. Si $\bar{I}[y] = \dfrac{I[y]}{J[y]}$, en donde $I[y] = \int_a^b \left[p(x)y'(x)^2 - q(x)y(x)^2\right]dx$ y $J[y] = \|y\|^2$, demuestre que la condición de extremo conduce a una ecuación de Euler-Lagrange de extremo condicionado.

12. Si se desarrolla la función $y(x)$ como una combinación lineal de las funciones propias del operador $\hat{L}$, $y(x) = \sum_i c_i y_i(x)$, demuestre que $\bar{I}[y] = \dfrac{\sum_i |c_i|^2 \lambda_i}{\sum_i |c_i|^2}$.

13. Considere la ecuación diferencial $-\dfrac{d^2 y}{dx^2} = \lambda y$, en [0,1], con $y(0) = y'(1) = 0$.

a) Muestre que la forma general de un polinomio cúbico que satisface las condiciones de frontera es la siguiente: $y_\alpha(x) = a_2\left[\left(x^3 - 3x\right)\alpha + x^2 - 2x\right]$, en donde $\alpha = \dfrac{a_3}{a_2}$.

b) Demuestre que $\bar{I}\left[y_\alpha\right] = \dfrac{\left\langle y_\alpha \middle| \hat{L} y_\alpha \right\rangle}{\left\langle y_\alpha \middle| y_\alpha \right\rangle} = \dfrac{\frac{24}{5}\alpha^2 + 5\alpha + \frac{4}{3}}{\frac{68}{35}\alpha^2 + \frac{61}{30}\alpha + \frac{8}{15}}$.

c) Muestre que el valor de α que minimiza a $\bar{I}$, satisface la ecuación $36\alpha^2 - 48\alpha - 35 = 0$.

d) Obtenga las soluciones de la ecuación anterior y analice cada una para determinar $\bar{I}$.

e) Demuestre que $\bar{I}\left[y_\alpha\right] \geq 2.468$.

14. Estime el menor de los valores propios de la ecuación diferencial definida en la recta real, $-\dfrac{\hbar^2}{2m}\left[y'' - \left(\dfrac{m\omega}{\hbar}\right)^2 x^2 y\right] = \lambda y$, usando la familia de funciones $y = Ae^{-\alpha x^2}$.

7. Cálculo funcional

1. Sea $T_{TF}[\rho] \equiv C_{TF} \int \rho^{5/3}(\vec{r})dr$:

   a) Demuestre que $\dfrac{\delta}{\delta\rho(\vec{r}\,')}\left(\dfrac{\delta T_{TF}}{\delta\rho(\vec{r})}\right) = \dfrac{10}{9} C_{TF}\,\rho^{-1/3}(\vec{r}\,')\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$.

   b) Obtenga $\dfrac{\delta}{\delta\rho(\vec{r}\,'')}\left(\dfrac{\delta^2 T_{TF}}{\delta\rho(\vec{r})\delta\rho(\vec{r}\,')}\right)$.

2. a) Sea $G[\rho] = \int f(\rho)d\vec{r}$, demuestre que:

$$\frac{\delta G}{\delta\rho(\vec{r})} = \frac{\partial f}{\partial \rho} \text{ y}$$

$$\frac{\delta^2 G}{\delta\rho(\vec{r})\delta\rho(\vec{r}\,')} = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2}$$

   b) Sea $G[\rho] = \int f(\rho, \nabla\rho)d\vec{r}$, demuestre que:

$$\frac{\delta G}{\delta\rho(\vec{r})} = \frac{\partial f}{\partial \rho} - \nabla\cdot\frac{\partial f}{\partial\nabla\rho}$$

3. Sea $F[\rho] = \int h(\vec{r},\vec{r}\,')\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}\,')d\vec{r}d\vec{r}\,'$, con $h(\vec{r},\vec{r}\,') = h(\vec{r}\,',\vec{r})$. Demuestre las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\delta F}{\delta\rho(\vec{r})} = 2\int h(\vec{r},\vec{r}\,')\rho(\vec{r}\,')d\vec{r}$$

$$\frac{\delta^2 F}{\delta\rho(\vec{r})\delta\rho(\vec{r}\,')} = 2h(\vec{r},\vec{r}\,')$$

$$\frac{\delta^n F}{\delta\rho(\vec{r}_1)\delta\rho(\vec{r}_2)\ldots\delta\rho(\vec{r}_n)} = 0 \qquad (n>2)$$

4. Calcule la primera y la segunda derivadas del funcional de Weizsacker,
$T_W[\rho] = \dfrac{1}{8}\displaystyle\int \dfrac{\nabla\rho(\vec{r})\cdot\nabla\rho(\vec{r})}{\rho(\vec{r})}$

5. a) Para $N[\rho] \equiv \int \rho(\vec{r})d\vec{r}$, demuestre que $\frac{\delta N}{\delta \rho(\vec{r})} = 1$.

b) Obtenga la ecuación de Euler-Lagrange del funcional δ-dimensional

$$E[\rho] = C_\delta \int \rho^{1+\frac{2}{\delta}} d\vec{r} + \frac{1}{2}\int \rho(\vec{r})\phi_\rho(\vec{r})d\vec{r} + \int \rho(\vec{r})V(\vec{r})d\vec{r}$$

en donde ϕ_ρ es solución de la ecuación de Poisson, $\nabla^2\phi_\rho = -4\pi\rho$ y V es solución de $\nabla^2 V = 4\pi Z\delta(\vec{r})$. (Utilice la función de Green de la ecuación de Poisson).

c) Aplique el laplaciano a la ecuación obtenida en el inciso b y obtenega una ecuación diferencial para la densidad.

6. Minimice el funcional de Kohn-Sham

$$E^{KS}[\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_n] = T_s[\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_n] + V_{ee}^{KS}[\rho] + \int \rho(r)V(r)\,dr\ ,$$

con

$$T_s[\phi_1, \phi_2, \ldots \phi_n] = \sum_{k=1}^{N} \left\langle \phi_k \left| -\tfrac{1}{2}\nabla^2 \phi_k \right.\right\rangle, \quad \rho(r) = \sum_{k=1}^{N} \left|\phi_k(r)\right|^2\ ,$$

sujeto a las condiciones de normalización de los orbitales, $\langle \phi_k | \phi_k \rangle = 1$, para obtener la forma explícita de las ecuaciones de Kohn-Sham, $\frac{\delta E^{KS}}{\delta \phi_i} = \varepsilon_i \phi_i$.

7. a) Utilice la ecuación (20) de la referencia *Int. J. Quant. Chem.* **Suppl. 28**, 231 (1994) para demostrar las relaciones de la ecuación (21).

b) Sustituya $A=x_1$ y $A=y_1$ en las expresiones anteriores y obtenga las relaciones de la ecuación (22).

8. Ecuaciones diferenciales parciales

1. Resuelva por separación de variables la ecuación de Laplace en dos dimensiones $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Considere todas las posibilidades para la constante de separación:
   a) $l>0$.
   b) $l<0$.
   c) $l=0$.

2. Se tiene un tubo seminfinito con agua. En t=0, el extremo en x=0 se pone en contacto con una solución de concentración fija, u_0. Resuelva la ecuación de difusión $\kappa\nabla^2 u = \frac{\partial u}{\partial t}$, en donde $u = u(x,t)$, con las condiciones de frontera

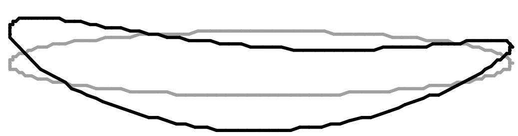
$$u(x,0) = 0, \quad u(0,t) = u_0, \quad u(\infty,t) = 0$$

3. Considere una placa seminfinita, $0 \le x \le \infty$, $0 \le y \le b$, con temperatura fija en los bordes: T=0 en y=0, y=b y $x \to \infty$; en x=0, $T(0,y)=f(y)$.
   a) Muestre que $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi y}{b} e^{-\frac{n\pi x}{b}}$ es la solución estacionaria, con

$$B_n = \frac{2}{b}\int_0^b f(y)\sin\frac{n\pi y}{b}\,dy$$

   b) Si $f(y)=u_0$=cte., obtenga la solución estacionaria.

3. Se tiene una membrana circular de radio a en un aro que no es plano.



La altura del borde satisface la ecuación, $z(\phi) = \varepsilon(\sin\phi + 2\sin 2\phi)$. Encuentre la forma de la membrana.

5. Aplique la transformación $\mu = \cos\theta$ a la ecuación diferencial $\sin\theta\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\cdot\Theta') + (\mu + \lambda\sin^2\theta)\Theta = 0$ y obtenga la ecuación diferencial para la función nueva $M(\mu) = \Theta(\theta)$.

6. a) Muestre que al realizar la separación de variables de la ecuación de onda,

$$\nabla^2 U = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2},$$

se obtiene la siguiente solución oscilatoria en t,

$$U(\vec{r}, t) = u(\vec{r}) \cdot \left[Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \right],$$

en donde $\omega = kc$ y u es solución de la ecuación de Helmholtz.

b) Repita el procedimiento para la ecuación de calor,

$$\kappa \nabla^2 U = \frac{\partial U}{\partial t},$$

y demuestre que $U(\vec{r}, t) = u(\vec{r}) \cdot Ae^{-\lambda k^2 t}$.

7. Lleve a cabo la separación de variables en la ecuación de Helmholtz, $\nabla^2 u + k^2 u = 0$, y demuestre que:

a) En coordenadas cilíndricas, $u(\vec{r}) = P(\rho) Z(z) \Phi(\phi)$, con

$$\begin{aligned} P(\rho) &= AJ_m(k'\rho) + BY_m(k'\rho), \quad k'^2 = k^2 + \alpha \\ Z(z) &= Ee^{\sqrt{\alpha} \cdot z} + Fe^{-\sqrt{\alpha} \cdot z} \\ \Phi(\phi) &= Ce^{im\phi} + De^{-im\phi}, \quad \alpha = m^2 \end{aligned}.$$

b) En coordenadas esféricas, $u(\vec{r}) = R(r) Y_{lm}(\theta, \phi)$, con

$$R(r) = Aj_l(kr) + Bj_{-l}(kr),$$

en donde $j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l + 1/2}(x)$.